

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

ערן רביב

מאמר זה מספק כלי מתמטי נוסף לארגון הכלים של הלוח העברי. לוח ס"א ראשים הוא לוח שהוכן בצרפת לפני כשבע מאות וחמישים שנה ככלי נוח למציאת סימני 19 שנות המחזור. לוח חדשני זה מצביע על העובדה שבמחזוריות הלוח ייתכנו רק 61 סדרות כאלו (נושא שנדון במאמרים קודמים שלי שהתפרסמו ב"ד", גיליונות 22, 26, 27, 28, 32, 33). במאמר זה אנו מראים כיצד ניתן להשתמש בלוח זה באופן מתוחכם ולמצוא את דילוגי השנים בין מופעים שווים של סדרות סימני השנה.

המאמר מתחלק לשלושה חלקים, בחלקו הראשון נציג בתמצית את כללי הלוח העברי, בחלקו השני נסביר את אופן השימוש בלוח ס"א ראשים ונשפר את הלוח כדי שנוכל להשתמש בו ככלי המייצג את מחזוריות המולדות בלוח העברי, ובחלקו האחרון של המאמר נציג שיטה חדשה שבעזרתה ניתן להבין את הדילוגים בין מופעים של סימני השנה ונתח את הקשר המתמטי בין דילוגים אלו.¹ את השיטה נדגים על שני מקרי בוחן.

הלוח העברי הקבוע²

רקע

הלוח העברי ככל הנראה נקבע סופית בראשית המאה העשירית לאחר המחלוקת המפורסמת בין רב סעדיה גאון הבבלי לבין ר' אהרון בן מאיר הארץ-ישראלי.³ הלוח

* תודות לאינג' איידלר, לרחמים שר שלום ולפרופ' עלי מרצבך שקראו את המאמר והציעו תיקונים חשובים.

1 הרעיון המוצע במאמר הוצג לראשונה בהרצאה במסגרת סמינר הלוח העברי במחלקה למתמטיקה באוניברסיטת בר אילן בתאריך 16.10.18. ההרצאה נמצאת ברשת בקישור:

https://www.youtube.com/watch?v=nRV4M-ZZUBE&index=27&list=PLXF_IJaFk-9DWxOnG84eMXOxwxhpQY6D

2 חלק זה כתוב בקצרה והרוצה להרחיב יוכל לקרוא בספרו של רחמים שר שלום, "שערים ללוח העברי" בהוצאת המחבר.

3 שטרן טוען שהמחלוקת נמשכה עוד כמעט מאתיים שנה אך אין ראיה המאששת השערה זו.

העברי הקבוע מושתת על כללים חשבוניים ואינו מסתמך על ראיית החרמש החדש של הלבנה בתחילת כל חודש.

תקציר כללי הלוך

אורך חודש הלבנה

הלוך הקבוע מתבסס על אורך חודש ממוצע שהיה ידוע לבבלים הקדמונים והוא 29.5 ימים 44 דקות ושלוש ושליש שנייה.⁴

על מנת להביע ערך מספרי זה כמספר שלם שאינו מתחלק חילקו את השעה ל-1080 חלקים כך שחודש לבנה הוא באורך של 765,433 חלקים. מכיוון שכל החישובים הם תמיד מודולו שבוע לכן ניתן לדבר על "יתרון חודש" או בכמה חלקים ייעתק מולד זה מהחודש הקודם ולכן מתקבל כי $39673p \equiv 765433 \pmod{181440}$.

השוואת חודשי לבנה לשנות חמה

כדי להשוות את שנות החמה לחודשי לבנה שלמים הוחלט להשתמש בקירוב של 19 שנים (המחזור המטוני) שבכל מחזור יש 235 חודשי לבנה המחולקים ל-12 שנים פשוטות בנות 12 חודש ו-7 שנים מעוברות בנות 13 חודש, בסך הכול 235 חודשים. השנים 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19 הן השנים המעוברות בכל מחזור. לצורך עריכת לוח לשנה מסוימת דרושים לנו שלושה נתונים: היום בו יחול ראש השנה א' בתשרי; האם השנה חסרה, כסדרה או שלמה; האם השנה פשוטה או מעוברת (במקום הנתון השלישי מקובל לסמן את היום שבו יחול א' של פסח). נתונים אלה מוצגים כ"סימן קביעות השנה" כמוסבר להלן.

4 אוטו נויגבאואר מצא את הערך המספרי הזה בלוחות טין בבליים. ראו: O. Neugebauer, *Astronomical Cuneiform Texts, Babylonian Ephemerides of the Seleucid Period for the Motion of the Sun, the Moon, and the Planets*, Princeton, N.J., 1955, pp. 271-272. הבבלים לא הציגו את מידת החודש עם חלוקת השעה ל-1080 חלקים אלא כמספר בבסיס 60 (29d,31',50'',8''',20'''''). בהמרה לימים שעות דקות ושניות מתקבל הערך שנבחר בלוך העברי.

בפרק שבו דן ראב"ח בספר העיבור באורך החודש הממוצע ישנו שיבוש קל, הוא מביא את הערך המספרי של היפרכוס – 31',50'',8''',9''''',20''''', ואילו אח"כ הוא מחשב את הערך של תלמי (=הזהה לערך לוחני).

ראו גם: J. J. Ajdler, "The Equation of Time in Ancient Jewish Astronomy", *B.D.D.* 16: (2008), footnote 94.

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

קביעת יום ראש השנה

כדי לקבוע את יום ראש השנה של שנה מסוימת, יש לחשב תחילה את היום בשבוע שבו חל המולד (המחושב) של חודש תשרי.

מולד זה יוצא מנקודת הנחה שישנו מולד ידוע כמולד בסיס (הנקרא "עיקר", מולד תוהו = ב' ה' ר"ד). לערכו של מולד הבסיס עלינו להוסיף את סך היתרונות של כל החודשים שבין שני התאריכים. כאמור כל החישובים הם מודולו שבוע.

הדחיות

לאחר מציאת יום המולד עלינו לבדוק אם יום ראש השנה ייקבע בו ביום או יידחה ביום או יומיים.

הכללים העומדים מאחורי הזזה זו נקראים ארבע הדחיות:

1. יום ראש השנה לא ייקבע בימים א', ד', ו'. היה והמולד יצא באחד מימים אלו אזי יידחה יום ראש השנה ליום המחר.
2. אם ערכו המספרי של המולד יוצא החל מחצות היום (גדול או שווה⁵ לשעה 18 ללא חלקים) אזי יום ראש השנה יידחה למוחרת למעט אם למוחרת חל אחד מהימים א' ד' ו', אז יידחה יום ראש השנה ביומיים.
3. אם בשנה פשוטה ערכו המספרי של המולד גדול או שווה ל-ג', ט', ר"ד, אזי יידחה יום ר"ה ליום ה'.
4. אם בשנה שהיא לאחר עיבור המולד המחושב הוא גדול או שווה ל-ב', ט"ו, תקפ"ט, אזי יידחה יום ר"ה ליום ג' בשבוע.

אורך השנה

אורכם של החודשים קבוע למעט החודשים מרחשוון וכסלו. אורכם נקבע לפי פער הימים בין יום ראש השנה הנוכחי ליום ראש השנה הבא. בשנה פשוטה אם הפער הוא 3 ימים אזי מרחשוון וכסלו בני 29 ימים, אם הפער הוא 4 ימים אזי מרחשוון הוא בן 30 ימים וכסלו בן 29 ימים, ואם הפער הוא 5 ימים אזי שני החודשים בני 30 ימים. באופן דומה בשנה מעוברת עבור פער של 5, 6, 7 ימים בהתאמה. נסכם בטבלה את אורכי החודשים ואורך השנה בכל אחת מהאפשרויות:

5 דעת חכמי בבל, בתקופת מחלוקת רס"ג ובן מאיר, שראש השנה אינו נדחה אלא אם חל המולד בחצות היום ועוד חלק. מובן שלסוברים כך זה משפיע גם על שתי הדחיות האחרונות כי הן "תולדות" של שתי הדחיות הראשונות ואז צריכים לומר: גדול מג' ט ר"ד וגדול מיב טו תקפ"ט (ראו: צ"ה יפה, קורות חשבון העבור, ירושלים: הוצאת דרום, תרצ"א, עמ' קצו בהערה; בורנשטיין, מחלוקת רס"ג ובן מאיר, ורשה 1904, עמ' 64, 76, 86 הערה 2, ועוד).

ערן רביב

שנה מעוברת			
שלמה	כסדרה	חסרה	
30	30	30	תשרי
30	29	29	מרחשוון
30	30	29	כסלו
29	29	29	טבת
30	30	30	שבט
30	30	30	אדר א'
29	29	29	אדר
30	30	30	ניסן
29	29	29	אייר
30	30	30	סיוון
29	29	29	תמוז
30	30	30	אב
29	29	29	אלול
385	384	383	סה"כ

שנה פשוטה			
שלמה	כסדרה	חסרה	
30	30	30	תשרי
30	29	29	מרחשוון
30	30	29	כסלו
29	29	29	טבת
30	30	30	שבט
29	29	29	אדר
30	30	30	ניסן
29	29	29	אייר
30	30	30	סיוון
29	29	29	תמוז
30	30	30	אב
29	29	29	אלול
355	354	353	סה"כ

טבלה 1

סימן השנה

בלוח הקבוע ישנם 14 סוגי שנים,⁶ כל שנה מסומנת בעזרת צירוף של שלוש אותיות: האות הראשונה מציינת את היום שבו חל א' של ר"ה, האות השנייה מסמנת אם השנה חסרה, כסדרה או שלמה, ולפי זה את מספר ימי השנה, והאות השלישית מציינת את היום שבו חל ט"ו בניסן (פסח).

צירוף אותיות זה נקרא קביעת השנה או סימן השנה, אותו אנו מוצאים בפתחם של לוחות שנה רבים.

לדוגמה שנת תשע"ז (שנה ראשונה במחזור = פשוטה) –

6 לפשוטה 7 למעוברת. לחסרי רקע מומלץ לקרוא בספרו של רחמים שר שלום, שערים ללוח העברי, בהוצאת המחבר, וכן לעיין במאמרים קודמים שלי ב"ד"ר 35,33,32,28,22.

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

שנה	מולד תשרי			דחייה	יום א' בתשרי	סימן השנה
	יום	שעה	חלק			
5777 (תשע"ז)	0	20	724	מולד זקן בשבת + א'	2	בחג
5778 (תשע"ח)	5	5	520	ללא	5	הכז

טבלה 2

בטבלה מס' 2 אנו רואים שלפי המולדות וכללי הדחיות ראש השנה ה'תשע"ז יחול ביום שני בשבוע, ואילו ראש השנה תשע"ח יחול ביום חמישי בשבוע, בין שני ראשי השנים יש 3 ימים + 50 שבועות שהם 353 ימים ולכן השנה "חסרה".

לוח ס"א ראשים

מחבר הלוח

בתחילת המאה הי"ג פורסם לוח חדשני ומהפכני – לוח ס"א ראשים.⁷ הלוח מובא לראשונה⁸ בספר "יסוד עולם" לר"י הישראלי, ושם הוא מכנהו "הלוח שהמציאוהו החכמים האחרונים", ללא ציון שם מחברו.⁹ מטרת חיבור טבלה זו היא פישוט התהליך

7 לוח ס"א ראשים. כאמור מיוחס לריצב"א (=ריב"א, רבנו יצחק בן אברהם מדמפייר [נכדו של רבי שמשון הזקן מפלייזא, גיסו של רבנו תם], צרפת, אחיו של הר"ש משנץ, תלמיד רבנו תם ור"י הזקן, קרוב לשנת 1200).

8 במהדורת דפוס.

9 בחלק שני מאמר חמישי פרק רביעי הוא כותב: "ואודיע סדר גלגול עת המולד על שעות ימי השבוע וחלקיהן הולך וסובב עד שיחזור למעמדו הראשון... שני העניינים האלה שזכרנו עתה יש בהם פלפול גדול ואעפ"י שאינם כ"כ מצורך העיבור אני כדי להגדיל תורה ולהאדירה ראיתי לברר אותם בפי' הזה וללמד ולהודיע דרך חישובם... ואתחיל ואומר כי רגע מולד החודש הוא מתגלגל וסובב על שעות ימי השבוע וחלקיהן ואינו חוזר למעמד הראשון מהם עד לאחר ז' מאות וע"ב מחזורים וב' שנים ח' חדשים עוד שמספר חדשי הזמן הזה לפי זה הוא קפ"א אלף ות"מ חדשים שבכדי זה הוא מספר חלקי שעות ימי השבוע שעליהם יתגלגל רגע המולד ויסובב אותם וזה כי מעמד ידוע מחלקי ימי השבוע הוא לרגע מולד אחד אחד מחדשי הזמן האמור וטעם עיקר זה וסודו הוא לפי שתשצ"ג חלקים שבהם הוא עודף זמן החודש על ימים ושעות שלמות הוא מספר פשוט ר"ל שאינו בא מכפילת מספר במספר ובשביל זה אינו יכול רגע שום מולד לחזור למעמדו מחלקי ימי השבוע עד שיתגלגל לו ויעבור על כולם...". המחבר מסביר שהמספר 793 הוא מספר ראשוני ולכן כל הצירופים יהיו בטרם יחזור המולד לערכו הראשון. בטענון זה טעה המחבר (ובעקבותיו וילק). המספר 793 אינו ראשוני כי הוא כפולה של המספרים 13 ו-61. אומנם מסקנת המחבר עדיין נכונה ותקפה כי המספרים 793 ו-181,440 הם זרים זה לזה כלומר $\gcd(181440, 793) = 1$.

של מציאת סימן השנה. בשימוש בטבלה מוכנה מראש המכילה את כל האפשרויות נוכל לקצר את תהליך מציאת סימני שנות המחזור והנתון היחיד שנזדקק לו הוא חישוב מולד תשרי של ראש המחזור.

בורנשטיין¹⁰ מייחס אותו לאחד מבעלי התוספות – הריצב"א, וזאת על סמך עדות אחת הנמצאת בקולופון של כתב יד של ספר עברונות משנת 1566, שם נכתב כדלהלן: ועוד תיקן רבי שמשון שניץ י"ג שורות לידע מהן הקביעות ור' יצחק ב"ר אברהם אחיו תיקן ס"א שורות וחוזרות הן ואין צורך בהם אח"כ ורב נחשון גאון תיקן י"ג שורות והן כתובים לפניך וגם אין הדבר נכון לנבוני לב.

הרעיון המהפכני המונח בבסיסו של לוח זה הוא שאם נחלק את שנות העולם לסדרות בנות 19 שנה כל אחת, נקבל רק ואך ורק 61 צירופים אפשריים של סימני הקביעות ותו לא! המצאה חדשנית זאת מאפשרת כאמור בחישוב מולד תשרי של ראש המחזור בלבד לדעת את סימני השנה של כל שנות המחזור.

השימוש בלוח ס"א ראשים

כדי להשתמש בלוח זה, בשלב הראשון יש לחשב את מולד תשרי של ראש המחזור ובשלב השני לחפש בתחומי הראשים היכן התוצאה "נופלת". הנוסחה למציאת מולד תשרי של ראש המחזור בחלקים היא:

$$M = \left[57444 + 69715 * \text{int} \left[\frac{S - 1}{19} \right] \right] \pmod{181440}$$

משוואה 1

מציאת מולד תשרי של ראש המחזור, כדלהלן:

השנה לבהר"ד מסומנת באות S, מפחיתים 1 מהשנה, מחלקים ב-19 ולוקחים את החלק השלם, מכפילים ביתרון מחזור, מוסיפים לבהר"ד ומפחיתים את השבועות השלמים.

- האות S מייצגת את מספר השנה לבהר"ד.
- האות M מייצגת את מולד תשרי של ראש המחזור בחלקים.
- Int – החלק השלם מתוצאת החלוקה.
- mod – השארית מתוצאת החלוקה.
- 57444 – מולד בהר"ד בחלקים.
- 69715 – יתרון מחזור בחלקים.
- 181440 – שבוע בחלקים.

10 "דברי ימי העיבור האחרונים", התקופה טז, בעמוד 292.

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

דוגמה לשימוש בלוח

שנת תשע"ט (=5779), נציב במקום S 5779 ונקבל כדלהלן:

$$\text{int} \left[\frac{S - 1}{19} \right] = \text{int} \left[\frac{5779 - 1}{19} \right] = 304$$

כלומר חלפו 304 מחזורים ואנו נמצאים במחזור ה-305.

עתה נמצא את מולד תשרי של ראש המחזור:

$$M = [57444 + 69715 * 304] \pmod{181440} = 22324p$$

נחפש היכן גבול זה נמצא ונראה שאנו בתחום שורה מספר 61:

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

בטבלה מספר 3 אנו מוצאים את לוח ס"א ראשים "הקלאסי" כמופיע בספרות. נשים לב לעמודה המכונה "תחום שורה". עמודה זו מצביעה על סך החלקים שבין הגבול הפותח את השורה לגבול הסוגר את השורה. אנו רואים שלא כל השורות בעלות תחום זהה. כמו כן סך כל התחומים מסתכם ל- 181440 – סך החלקים שבשבוע.

גבולות האפיונים						תחום שורה	1	2	3	4	5	6
יום	שעה	חלק	בחלקים	בחלקים	שורה	1	2	3	4	5	6	
61	0	20	560	22160	4168	בחג	הכז	בשז	בשה	זחא	גכז	
1	1	0	408	26329	5325	בחג	השא	גכז	בשה	זחא	גכז	

טבלה 4

טבלה מספר 4 היא טבלה שרשמנו בה את שש השנים הראשונות במחזור בהתאם לסימני שורה 61 ומתחתיה שורה 1.

שורה מספר 61 מתחילה ב- 22164¹¹ חלקים עד (ולא עד בכלל) 26329 חלקים.

הלוח הוא ציקלי (מעגלי) ולכן מתחת לשורה מספר 61 רשמנו את שורה מספר 1.

אמור מעתה שכל עוד מולד תשרי נמצא בטווח של החל מ-0,20,564 ועד (לא עד

בכלל!) 1,0,409 סימני השנים הם בהתאמה לשורה מספר 61 (ראו הערה מספר 11).

$$5779 \bmod 19 = 3$$

כלומר תשע"ט היא השנה השלישית במחזור 305.

11 יש לשים לב שאף ששורה 61 "מתחילה" ב-22160 חלקים, בפועל היא תתחיל ב-22164 חלקים, ראו בטבלה מספר 6. זה ההבדל בין לוח ס"א ראשים תיאורטי לבין גבולות "אמיתיים" (ההבדל בין טבלה מספר 3 לטבלה מספר 6). ההבדל נובע מהעובדה שספרת היחידות של מולד תשרי של ראש מחזור מתחילה תמיד בספרה 4 או 9. נושא זה זכה להרחבה והדגשה במאמרים קודמים שפורסמו מעל במה זו, ראו: רביב, "לוחות ושברי לוחות על מולדות ותכונותיהם", בד"ד 22 (2010), במיוחד שם בעמ' 33-34, וכן רביב, "לוח ס"א ראשים ככלי לחישוב שכיחות סדרות של סימני שנים", בד"ד 33 (2018), במיוחד בעמ' 100 נספח – לוח ס"א ראשים כמייצג את מחזוריות הלוח העברי – 689,472 שנים.

מולד תשרי של ראש מחזור ותיקון הגבולות הנדרש בלוח

כפי שהצבעתי במאמרים קודמים,¹² ספרת היחידות של מולד תשרי של ראש המחזור היא או 4 או 9.¹³ ובהתאמה לכך ספרת היחידות של מולד תשרי של כל שנה ושנה משנות המחזור מקבלת שתי אפשרויות בלבד. לכן עלינו לתקן את הגבולות בלוח ס"א ראשים ולקבל את הלוח המדויק המשקף בדיוק את מחזוריות המולדות בלוח העברי של 36288 צירופים של 19 שנים שהם 689472 שנים.¹⁴

הערות ללוח ס"א ראשים (טבלה 6 להלן)

גבולות הראשים הם "מתוקנים" כך שלעולם ספרת היחידות היא 4 או 9.
 1. בין שורה לשורה רואים אנו משבצות מסומנות, משבצות אלו מסמנות את השנים שבהן סימן השנה השתנה במעבר משורה לשורה, כלומר הן הגורם לפתיחת גבול חדש.

לדוגמה:

בשורה מספר 1 (בטבלה מספר 3) רואים שהשנה השנייה והשלישית ברקע אפור, הסיבה לכך היא שבשורה 61 סימן שנים אלו שונה, כדלהלן:

שנה שלישית במחזור	שנה שנייה במחזור	מספר שורה בלוח ס"א
בשז	הכז	61
גכז	השא	1

טבלה 5

12 בעיקר במאמר: ערן רביב, "לוחות ושברי לוחות – על מולדות ותכונותיהם", בד"ד 22 (2010), עמ' 31-54.

13 הראשון שכתב זאת במפורש היה ככל הנראה ר' אברהם אבן עזרא בספר העיבור שלו (ותודה לידידי הרב ד"ר שי ואלטר שהפנה את תשומת ליבי למקור זה) וזה לשונו: "... ולעולם יהיו בו (=בראש המחזור, ע"ר) ארבעה חלקים אם המחזורים זוגות יהיו בו תשעה" (ספר העיבור בהוצאת שזח"ה, מקיצי נרדמים, ליק 1874, עמוד 2 בחלק ראשון). ואף בהמשך הספר הוא כותב: "...וישאר לכל מחזור להשלמת תקצ"ה חלקים חלק אחר הוסף על כל החלקים חלקים כמספר המחזורים וטעם להיות בו חלקים ארבעה אם מחזורים זוגות כי תקצ"ה יכפלו ישובו עשרה ואין שם אחדים והנה ישאר לעולם ד' בהרד' ואם יהיה נפרד יהיה בו תשעה". ייתכן שאף לפניו ר' אברהם בר' חייא הנשיא היה מודע לכך, ראו בהערת המו"ל (צבי פיליפובסקי, "ביאור מאמר קשה בשער התשיעי ממאמר שני מאת המסדר") וראו גם צבי פיליפובסקי בספרו "מועד מועדים", לונדון 1868, עמ' לד.

14 ראו: J. J. Ajdler, "The Period of 689,472 Years in the Jewish Calendar and Its Applications: in Frequency and Probability Problems", B.D.D. 28 (2013), pp. 30-40.

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

אנו רואים שסימן השנה השנייה במחזור, בשורה הראשונה, משתנה ל־השא מ־הכז, כלומר יום ראש השנה אינו משתנה אבל השנה מתארכת ביום אחד. התארכות השנה נובעת מגבול דחייה בראש השנה השלישית במחזור. בשורה מס' 61 אנו מבחינים שיום ראש השנה היה ביום ב' ואילו בשורה מס' 1 הוא ביום ג'. מכיוון שהשנה השנייה במחזור אינה מעוברת, סיבת השינוי היא מולד זקן ביום שני בשבוע.

אמור מעתה שהעתקתו של מולד זקן ביום שני בשנה השלישית במחזור לראש המחזור היא הגבול הפותח את שורה מספר 1 בלוח, וכן על זו הדרך.

2. כמו כן במקום לדבר על "תחום שורה" שהסתכם לכדי 181440 חלקי השבוע, כאן אנו מדברים על היקרות שורה, שמשמעה כמה פעמים יימצא צירוף השורה המבוקשת במהלך מחזוריות מולדות הלוח (689472 שנים). אי לכך הוספנו עמודת היקרויות¹⁵ לכל שורה וניתן לראות שסך ההיקרויות הוא 36288 ולכן לוח זה שקול למחזוריות המולדות בלוח העברי (689472 = 19*36288 שנים).

15 המונח היקרות משמעו מספר המקרים בפועל שבהם יכול לחול ראש המחזור. שכן במחזוריות הלוח העברי מולדות תשרי של ראש המחזור לעולם יסתיימו בספרה ארבע או תשע. לכן לדוגמה שורה מספר 1 של לוח ס"א ראשים המסורתי (טבלה מספר 3 לעיל) נפתחת בגבול 1,0,408 אבל בפועל המולד בעל הערך המספרי הנמוך ביותר שמשויך לשורה זו הוא 1,0,409.

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

בורנשטיין, שהיה בעל עין בוחנת, הבחין שיש בלוח זה יכולות רבות מעבר לשימוש הפשוט, וכך הוא כותב:¹⁶

כל איש יכיר מיד את התועלת המעשית היוצאת מן הלוח הזה כי יתן לנו בחדא מחתא על פי ידיעת מולד תשרי של ראש המחזור את קביעת כל י"ט השנים הכלולות בו. אבל תועלתו תגדל שבעתיים לאיש המתבונן על חשבון העבור מנקודת הראות העיונית, כי יתן לנו את המפתח להיכנס חדריו פנימה, ולהתיר כמה שאלות מסובכות שאי אפשר כלל להתירן על פי כללי ארבעת השערים למיניהם, או שאינן נפתרות על ידיהם אלא בקושי.

הדוגמה שלהלן מציגה היטב את אחד היישומים "לנבואתו" של בורנשטיין.

הצגת הבעיה

נציג את הבעיה בעזרת דוגמה שתשמש אותנו כמקרה בוחן. השנים תשע"ט תש"פ סימנן בשז בשה בהתאמה, בעיון בלוח סימני השנים רואים שצירוף זה מופיע בדילוגים. בטבלה מס' 7 רואים את השנים שבהן צירוף זה חל, את המחזורים שחלפו, את השנה במחזור וגם את הפעמים הבאות שצירוף זה מופיע:

טבלת הופעות צמד בשז בשה						
שורה בלוח ס"א	מולד תשרי של ראש מחזור בחלקים	"דילוג"	שנה במחזור	מספר המחזורים שחלפו	שנה	אירוע מספר
61	23229		3	291	5532	-5
8	50934	71	17	294	5603	-4
54	8924	27	6	296	5630	-3
39	148354	51	0	298	5681	-2
27	106344	27	8	300	5708	-1
61	22324	71	3	304	5779	0
54	8019	98	6	309	5877	1
27	105439	78	8	313	5955	2
59	21419	71	3	317	6026	3
54	7114	98	6	322	6124	4
27	104534	78	8	326	6202	5

טבלה 7

16 דברי ימי העבור האחרונים, חלק שני עמ' 291.

אם נסתכל על דילוגי השנים של הופעת צמד סימני השנים ניתן לשים לב שמתקיימים הקשרים:

$$98=27+71$$

$$78=27+51$$

עלינו לבחון:

האם אלו כל הדילוגים האפשריים?

מה פשר תופעת "סכום" הדילוגים?

אנו מעוניינים להציג שיטה כללית כדי למצוא את דילוגי השנים בין מופע למופע של רצף סימני שנים נתון. כמו כן נרצה להבין את התכונות של דילוגי השנים ומה הקשר החשובני ביניהם אם קיים.

הצעת הפתרון

נצא מלוח ס"א ראשים (כמייצג את מחזוריות סימני השנה בלוח העברי), ונפעל כדלהלן:

1. הכנת לוח ס"א "צבוע" – נצבע את האזורים המכילים את הרצף המבוקש.
2. פתיחת שורות במידת הצורך.
3. נרשום את טווחי המולדות (טווחי ההיקרויות) בראש מחזור המתאימים לכל קבוצה (החל מ- ועד ולא עד בכלל).
4. נאפיין את משוואת הדילוג.
5. הכנת טבלה המכילה את כל הטווחים (עבור כל הקבוצות) כאשר בכל שורה נוסף יתרון מחזור פעם אחר פעם.
6. נצמצם את הטווחים כאשר חוזרים לאותה קבוצה.
7. נבנה דיאגרמת קבוצות עם חיצוי קישור המביעים את הדילוג.
8. ננתח את התכונות המתמטיות של דיאגרמת החיצים.

הכנת לוח "צבוע"

סימן בשז (תשע"ט) מאפיין שנה מעוברת שלמה, לכן כל הרצפים בשז-בשה יהיו בשנה מעוברת ובשנה העוקבת לה (0,1: 3,4: 6,7: 8,9: 11,12: 14,15: 17,18).

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

לוח ס"א ראשים - גבולות אמיתיים (לצמדי בשז בשה)																							
ס'מ	גבולות האפיונים			שנה במחזור																			
	מ	שעה	חלק	היקרות	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	0	409	26329	1065	בחג	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
2	1	5	334	31654	540	בחג	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
3	1	7	874	34354	298	בחג	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
4	1	9	204	35844	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
5	1	9	229	35869	535	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
6	1	11	744	38544	833	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
7	1	15	589	42709	1605	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
8	1	22	1054	50734	4	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
9	2	0	409	52249	535	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
10	2	2	924	54924	539	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
11	2	5	379	57619	1899	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
12	2	14	154	67114	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
13	2	14	179	67139	298	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
14	2	15	589	68629	535	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
15	2	18	24	71304	540	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
16	2	20	564	74004	1065	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
17	3	1	489	79329	833	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
18	3	5	334	83494	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
19	3	5	359	83519	4	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
20	3	5	379	83539	829	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
21	3	9	204	87684	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
22	3	9	229	87709	535	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
23	3	11	744	90384	1903	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
24	3	20	539	99899	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
25	3	20	564	99924	534	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
26	3	22	1074	102594	299	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
27	4	0	409	104089	535	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
28	4	2	924	106764	1903	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
29	4	11	719	116279	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
30	4	11	744	116304	535	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
31	4	14	179	118979	833	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
32	4	18	24	123144	1605	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
33	5	1	489	131169	298	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
34	5	2	899	132659	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
35	5	2	924	132684	535	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
36	5	5	359	135359	4	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
37	5	5	379	135379	829	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
38	5	9	204	139524	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
39	5	9	229	139549	1604	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
40	5	16	689	147569	295	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
41	5	18	4	149044	539	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
42	5	20	539	151739	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
43	5	20	564	151764	534	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
44	5	22	1074	154434	299	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
45	6	0	409	155929	1605	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
46	6	7	874	163954	833	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
47	6	11	719	168119	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
48	6	11	744	168144	535	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
49	6	14	179	170819	1903	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
50	6	22	1054	180334	4	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
51	0	22	1074	180354	829	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
52	0	2	899	3059	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
53	0	2	924	3084	535	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
54	0	5	359	5759	4	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
55	0	5	379	5779	834	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
56	0	9	229	9949	1065	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
57	0	14	154	15274	539	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
58	0	16	689	17969	295	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
59	0	18	4	19444	4	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
60	0	18	24	19464	535	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
61	0	20	539	22139	5	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז
62	0	20	564	22164	833	בשה	וכז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז	בשה	בז

26329 36288

טבלה 8 מכילה לוח ס"א שבו צבענו את האזורים המתאימים לרצף בשז – בשה. מכיוון שהצמד האמור של סימני השנה, והמתייחס לשתי שנים רצופות, כולל גם את השנים ה־19 במחזור האחד והשנה הראשונה שבמחזור העוקב, עלינו לבדוק מהו תחום המולדות בראש המחזור המתאים לצמד זה.

אם נסתכל בשנה ה־19, סימן השנה בשז מתחיל משורה 33 ועד שורה 42 (כולל), ואילו השנה הראשונה במחזור שסימנה בשה תחום השורות הוא 4 עד 13 כולל. מתוך תחום זה עלינו לבחור את הטווח המתאים לצמד בשז (בשנה ה־19 במחזור) רבשה (בשנה 1 במחזור).

1. נבחר את השורה הראשונה שבה סימן השנה בשנה הראשונה הוא בשה (שורה רביעית), נפחית יתרון מחזור ונבדוק בתחום איזו שורה אנו "נופלים":

$$(35844-69715)(\text{mod}181440)=147569p$$

אנו רואים שזה "נופל" בתוך תחום של שורה מספר 39, לכן עלינו לפתוח שורה חדשה, כלומר לפצל את תחום שורה 39 לשתי שורות, לשורה אחת המתאימה לתחום מתחילת שורה 39 ועד 147569 (שעד כאן השנה העוקבת, כלומר הראשונה הבאה אחרי שנה 19, סימנה אינו בשה, ומ־147569 חלקים, שזה בדיוק הערך שבו סימן השנה העוקבת (הראשונה במחזור) יהיה בשה.

2. באופן דומה נבדוק עבור סוף תחום בשז בשנה ה־19 (סוף שורה 42). לשם בדיקה זו נבחר את הערך הפותח את שורה 43 ונוסיף יתרון מחזור:

$$(154434+69715)(\text{mod}181440)=42709p$$

אנו רואים שזה "נופל" בתוך התחום של שורה מספר 6 ולכן עלינו לפצל את השורה לשני תחומים, התחום עד הערך שבו סימן השנה הקודמת (השנה ה־19 במחזור) היה בשז, והתחום שממנו ואילך סימן השנה ה־19 משתנה.

טווחי המולדות (טווחי ההיקריות) בראש מחזור המתאימים לכל קבוצה

נסכם בטבלה את טווחי המולדות המתאימים לכל שנה משנות המחזור עבור הצירוף המבוקש ונקבל:

שנה 6		שנה 3		שנה 17		שנה 14		שנה 11		שנה 8		שנה 19	
עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-
9949	3084	19464	26329	50754	57619	67139	74004	83519	90384	99899	106764	147569	154434

טבלה 9

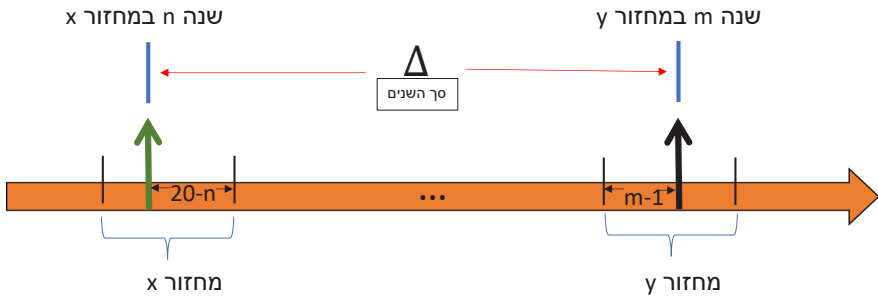
טבלה מס' 9 מכילה את טווחי המולדות בראש מחזור עבור כל שנה המקיימת את הצירוף בשז-בשה. הטבלה מסודרת משמאל לימין בהתאם לערכי המולד (מהנמוך לגבוה בהתאמה).

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

יש לשים לב שכל הטוחים שווים בגודלם 1373 היקריות.

אפיון משוואת הדילוג

נניח שמולד תשרי של ראש המחזור נמצא בטוח המולדות המתאים לאחת מהשנים המקיימות את הציורף המבוקש, נשאל את עצמנו לאתר כמה מחזורים אנו נכנסים לתוך טוח המולדות המתאים לאחד מהציורפים האחרים, כלומר כך:



איור 1

באיור מס' 1 אנו רואים ששנה n במחזור כלשהו (x) מקיימת את הציורף המבוקש ובפעם הבאה שאירוע זה מתרחש הוא בשנה ה- m במחזור y .
 $20-n$ = מבטא את סך השנים משנה n ועד סוף מחזור x (כולל).
 $m-1$ = מבטא את סך השנים מתחילת מחזור y ועד השנה ה- m (לא כולל).
 המשתנים n ו- m מקבלים את הערכים 1 עד 19.

בין שני האירועים חלפו Δ שנים, כך ש-

$$\Delta = 20 - n + 19A + m - 1 =$$

$$\Delta = 19 - n + m + 19A =$$

$$\Delta = -n + m + 19(A + 1)$$

משוואה 2

כאשר $A \in \mathbb{Z}^+$ (חיובי שלם).

כלומר באופן עקרוני המספרים הבאים בחשבון לדילוגים בין השנים המקיימות את המשוואה הוא כדלהלן:

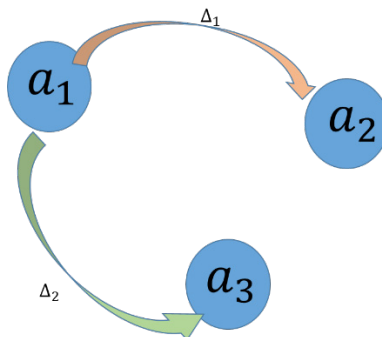
שנת "מוצא"	שנת "יעד"	Δ					
		A=0	A=1	A=2	A=3	A=4	A=5
3	6	22	41	60	79	98	117
6	8	21	40	59	78	97	116
14	3	8	27	46	65	84	103
3	11	27	46	65	84	103	122
8	11	22	41	60	79	98	117
11	14	22	41	60	79	98	117

טבלה 10

אם נציב באופן שרירותי (את ערכי A) נקבל את המספרים המקיימים את המשוואה. אולם בפועל רק המספרים המופיעים בצבע באים לידי ביטוי והיתר לא (יוסבר בהמשך). כמו כן הטבלה היא חלקית ולא מציינת את כל המעברים האפשריים בין שנות מוצא ויעד נתונות.

שיטת העבודה

נצא משנה כלשהי ונוסיף לטווח בראש המחזור (לגבול הפותח ולגבול המסיים) יתרון מחזור מודולו שבוע ונבדוק אם אנו נופלים בטווח של שנה אחרת המקיימת גם היא את הצירוף המבוקש. אם כן נרשום את הגבול החדש ונמשיך הלאה (בהוספת יתרון מחזור מודולו שבוע) עד אשר כל הטווח ימופה לקבוצות אחרות, כך:



איור 2

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

באיור מסר 2 אנו רואים סכמה שבה יוצאים משנה a_1 במחזור כלשהו, לאחר דילוג של Δ_1 שנים אנו עוברים לשנה a_2 , ולאחר דילוג של Δ_2 שנים אנו עוברים משנה a_2 לשנה a_3 . כאשר כל הטווח ממופה סיימנו את הטיפול בשנה a_1 ונעבור לשנה a_2 ומתחילים משם את התהליך כנ"ל.

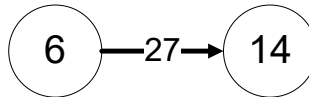
דוגמה I

כדי להבין את סכמת העבודה המוצעת, נדגים את התהליך במקרה הבוחן שלנו בשז-בשה, ובהמשך נביא דוגמה נוספת לסכמת הדילוגים של סימן השנה החא. נתחיל משנה מספר 6 (אין חשיבות לסדר) ונוסיף לגבול הפותח את הטווח ולגבול הסוגר את הטווח בכל שורה יתרון מחזור. בכל שלב נבדוק אם חלק מהתחום נופל בטווח של שנה אחרת המתאימה לצירוף שבחרנו. לאחר הוספת יתרון מחזור נקבל:

שנה 6	
החל מ-	עד לא כולל
3084	9949
72799	79664

בתוספת יתרון מחזור (69715 חלקים)

מעיון בטבלה מספר 9 לעיל אנו רואים שלאחר הוספת יתרון מחזור (מודולו שבוע) חלק מהטווח שהתקבל נופל בתחום שנה 14.¹⁷ לכן נחליף את 72799 ב-74004, נציין בדיאגרמה חץ משנה 6 לשנה 14 והדילוג הוא 27 שנים $(-6+14+1*19)$. משמעות הדבר היא שאם מולד תשרי נופל בחלק מהתחום של שנה מספר 6 (המקיים את הצירוף בשז-בשה) אזי לאחר 27 שנים נעבור לצירוף בשז-בשה, הפעם בשנה 14 במחזור.



נמשיך בתהליך של הוספת יתרון מחזור מודולו שבוע ונקבל:

17 שהרי טווח שנה 14 מתחיל ב-67139 ומסתיים ב-74004 (לא כולל), כך שבתחום 72799 עד 74004 אנחנו בתוך תחום של שנה 14, לכן נחליף את 72799 ב-74004.

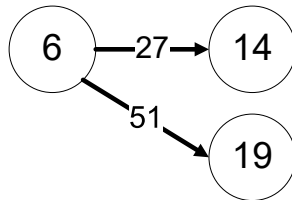
ערן רביב

שנה 6	
החל מ-	עד לא כולל
3084	9949
74004	79664
143719	149379

בתוספת יתרון מחזור

בתוספת יתרון מחזור

מעיון בטבלה מספר 9 לעיל אנו רואים שלאחר הוספת יתרון מחזור נוסף (מודולו שבוע) חלק מהטווח נופל בתחום שנה 19. לכן נחליף את 149379 ב-147569, נסיף בדיאגרמה חץ משנה 6 לשנה 19 והדילוג הוא של 51 שנים $(-6+19+2*19)$.



נמשיך בתהליך של הוספת יתרון מחזור מודולו שבוע ונקבל:

שנה 6	
החל מ-	עד לא כולל
3084	9949
74004	79664
143719	147569
31994	35844
101709	105559

בתוספת יתרון מחזור

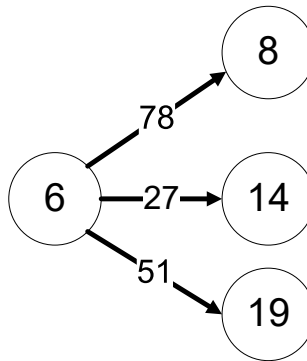
בתוספת יתרון מחזור

בתוספת יתרון מחזור

בתוספת יתרון מחזור

מעיון בטבלה מספר 9 לעיל אנו רואים שלאחר הוספת יתרון (פעמיים) כל הטווח שבין 101714 עד 107369 נופל בטווח של שנה 8 והדילוג הוא של 78 שנים $(-6+8+4*19)$. התקבל התרשים:

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה



עתה הסתיים התהליך עבור שנה מספר 6 כי מיפינו את כל הטווח של שנה מספר 6.

לאחר ביצוע התהליך כולו נקבל את הטבלה הבאה:

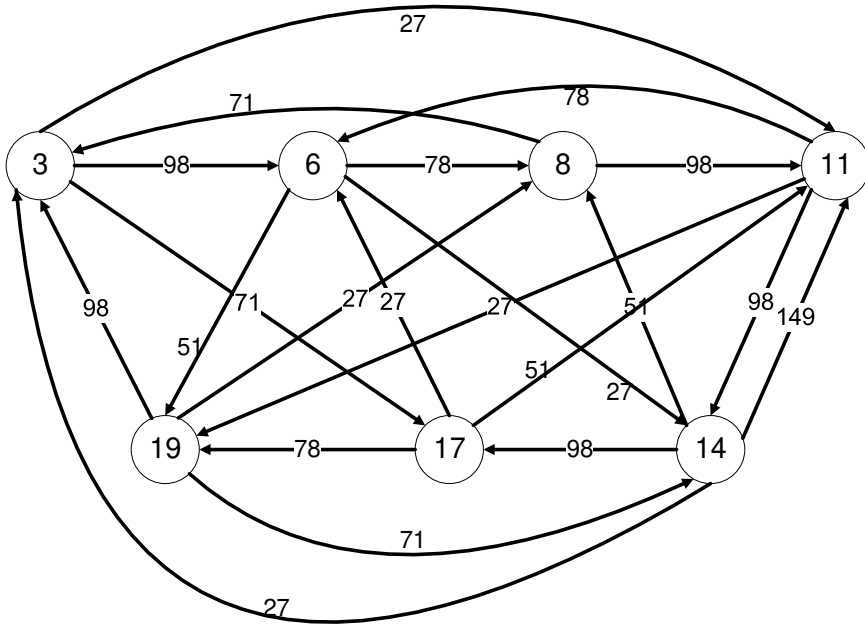
שנה 6		שנה 3		שנה 17		שנה 14		שנה 11		שנה 8		שנה 19	
החל מ-	עד לא כולל	החל מ-	עד לא כולל	החל מ-	עד לא כולל	החל מ-	עד לא כולל	החל מ-	עד לא כולל	החל מ-	עד לא כולל	החל מ-	עד לא כולל
3084	9949	19464	26329	50754	57619	67139	74004	83519	90384	99899	106764	147569	154434
74004	79664	89179	96044	120469	127334	136854	143719	153234	160099	169614	176479	35844	42709
143719	147569	90384		8744	15609	25129	31994	41509	48374	57889	64754	105559	112424
		160099	165759	9949		26324						106764	
31994	35844			79664	85324	96039	101709	111224	118089	127604	134469	175274	699
		48374	54034		83519		99899						
101709	105559		50754	149379	153234	164559	169614	180939	6364	15879	22744	63549	70414
		118089	120469			52834	57889	3084		19464			67139
		6364	8744			57619		69214	72799	85594	89179	133264	136854
						127334	129414						
						15609	17689					21539	25129
						85324	87404						

טבלה 11

טבלה מספר 11 הוכנה כך שבכל שורה מוסיפים יתרון מחזור על הערך המספרי של השורה שלפניה. אם אחד המספרים שמתקבל נמצא בתחום שנה אחרת (בהתאם

ערן רביב

לשורה הראשונה בטבלה זו, שורה המייצגת את כל תחום השנה), אזי מחליפים את המספר ומוסיפים חץ בדיאגרמה (כפי שהראינו בדוגמה עבור שנה מספר 6). כל המשבצות "הצבועות" משמען שהן נמצאות בתחום שנה אחרת. עתה, מתוך טבלה מספר 7 נוכל להכין את תרשים הדילוגים הבא:



איור 3

איור מספר 3 מתאר את כל הדילוגים האפשריים המקיימים את התנאי של צירוף סימני השנים בשז-בשה (ראו התאמה לטבלה מס' 7 לעיל). ניתן לסכם את הנ"ל בטבלה הבאה:

מקור	חיצים ל- [דילוג שנה]			
19	3(98)	8(27)	14(71)	
3	6(98)	11(27)	17(71)	
6	0(51)	8(78)	14(27)	
8	3(71)	11(98)		
11	0(27)	6(78)	14(98)	
14	3(27)	8(51)	11(149)	17(98)
17	0(78)	6(27)	11(51)	

טבלה 12

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

טבלה מספר 12 מראה את שנת המקור (העמודה השמאלית) והדילוג לשנת היעד ובסוגריים גודל הדילוג.

לדוגמה, השורה הראשונה מראה שלושה דילוגים כדלהלן: המשבצת (98)3 מייצגת דילוג משנה מספר 19 לשנה מספר 3 וגודל הדילוג 98 שנים. המשבצת (27)8 מייצגת דילוג משנה 19 לשנה 8 בדילוג של 27 שנים, המשבצת (71)14 מייצגת דילוג משנה 19 לשנה 14 בחלוף 71 שנים, וכן על זו הדרך.

ניתוח הדיאגרמה

לאחר שהוכנה הדיאגרמה ניתן לנסח כמה משפטים על הקשרים שבין החיצים. ניתוח תכונות אלו של הדיאגרמה יבהיר כמה קשרים מתמטיים חשובים בין הדילוגים שהוצגו ובהם תורף ממצא המאמר.

1. תכונה מספר 1 – "סכום מסלול סגור"

טענה: בכל מסלול סגור שנבחר היוצא משנה נתונה וחוזר לאותה השנה סכום דילוגי השנים מתחלק ב-19 ללא שארית.

נסמן ב- S סכום חיצים במסלול סגור כלשהו, אזי מתקיים: $S \equiv 0 \pmod{19}$
 הוכחה (טריוויאלית), נסכם את כל החיצים בעזרת משוואת הדילוג

$$\Delta_n = -n + m + 19A$$

ונקבל:

הסבר	המשוואה
הדילוג הראשון יוצא משנה a במחזור כלשהו ומגיע לשנה b במחזור אחר.	$\Delta_1 = -a + b + 19A$
כנ"ל דילוג שני משנה b ועד שנה c .	$\Delta_2 = -b + c + 19B$
.... וכן הלאה
עד לדילוג האחרון שחוזר לשנת המוצא a	$\Delta_n = -n + a + 19N$

$$S = 0 + 19S$$

$$A, B, \dots, N, S \in \mathbf{Z}^+$$

A, B, N, S – מייצגים את המחזורים השלמים שבין מופע למופע של הסדרה המבוקשת.

a, b, c, n, m – מייצגים את השנים שבהן מתקיים הרצף המבוקש.
 מש"ל

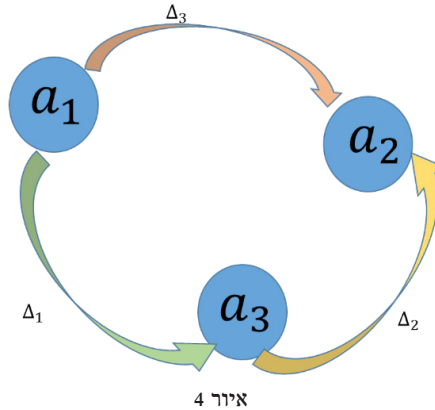
2. תכונה מספר 2 – "סכום מסלול סגור המכיל חיצים בכיוון הפוך"

תכונה זו נגזרת מהתכונה הראשונה.

אם יש חץ בכיוון הפוך סימנו שלילי. ולכן בדוגמה שבאיור 4 מייצגת שנה שממנה בדילוג של Δ_1 נגיע לשנה a_3 ואילו בדילוג של Δ_3 נגיע לשנה a_2 , לכן כאשר אנו מסכמים במסלול סגור את הדילוגים, אם אנו "הולכים" בניגוד לחץ, עלינו להוסיף סימן מינוס. ובדוגמה שבאיור מספר 4 סכום המסלול של הדילוגים יהיה:

$$\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = 0 \pmod{19}$$

אם נצרף את תכונה מספר 1 אזי נוכל לנסח טענה שבכל מסלול סגור שבו יש חץ הפוך אזי הוא יהיה שווה בערכו (במודולו 19) לסכום האחרים.
נמחיש זאת בעזרת דוגמה (איור 4):



טענה:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_3 \pmod{19}$$

הוכחה (כנ"ל) נסכם את משוואות החיצים ונקבל:

$$\Delta_1 = -a_1 + a_3 + 19A$$

$$\Delta_2 = -a_3 + a_2 + 19B$$

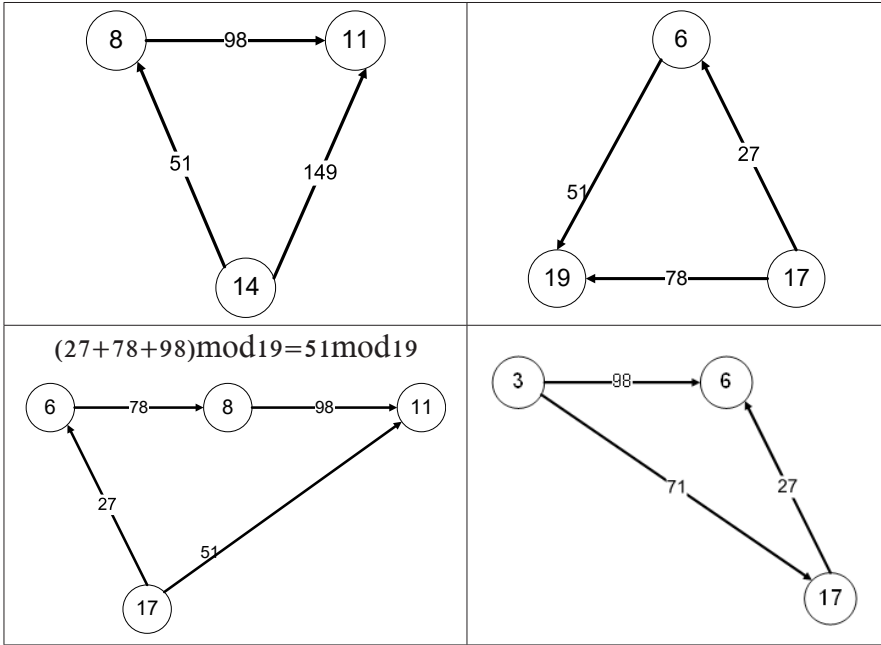
$$\Delta_3 = -a_1 + a_2 + 19C$$

$$A, B, C \in \mathbf{Z}^+$$

מש"ל

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

לשם המחשה נבחר דוגמאות מהדיאגרמה בשז-בשה

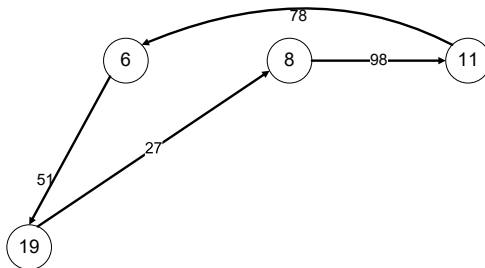
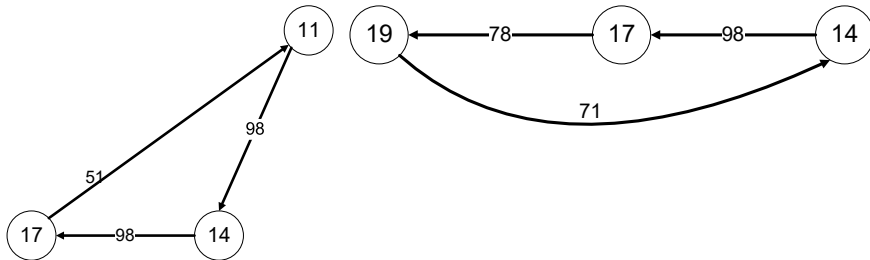
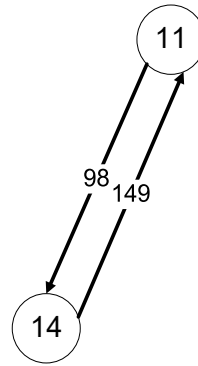
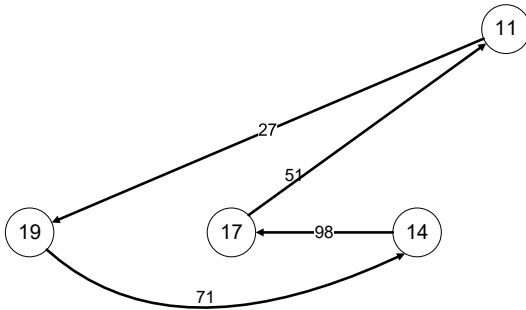
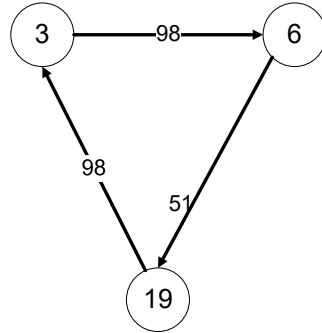
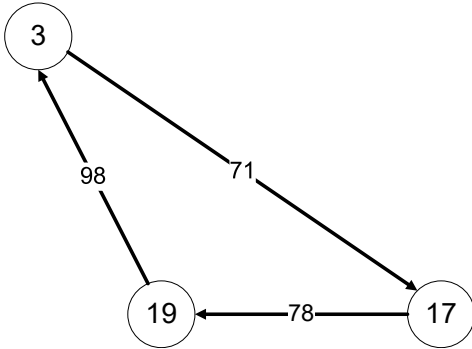


3. תכונה מספר 3 מחזוריות 247:

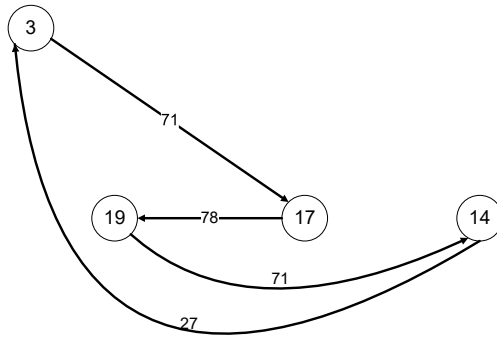
היה והטווח עבור שנה מסוימת גדול מ-905 חלקים, אזי יהיו מסלולים שסכומם הוא 247 שנים. הסבר: בחלוף 247 שנים (עיגול דרב נחשון גאון) ערכו המספרי של המולד נעתק ב-905 חלקים לאחור. אם הטווח גדול מערך זה אזי בחלוף 247 שנים נחזור לאותה שנה במחזור! בדוגמה שלנו הטווח הוא 6865 חלקים ולכן יהיו פעמים רבות של מסלולים שסכומם נותן 247 שנים. כלומר "סביב" כל שנה צריך להיות מסלול סגור שסכום החיצים שווה ל-247 שנים.

ערן רביב

דוגמאות:



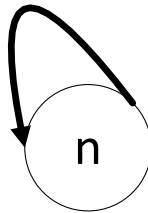
לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה



4. תכונה מספר 4 "לולאה סגורה"

תנאי ללולאה סגורה הוא שטווח המולדות יהיה גדול מיתרון מחזור כלומר גדול מ-13943 היקריות (וזה כאמור לא מתקיים).

$$\Delta_n = 19$$



טריוויאלי.

דוגמה II - סימן שנה החא

נדגים את התהליך במקרה בוחן נוסף שדרכו נחיד עוד כמה נקודות. במקרה זה אנו מעוניינים למצוא את דיאגרמת הדילוגים של מופעי סימן השנה החא.

שלבי העבודה:

1. סימון השטחים למופעי סימן השנה החא בלוח ס"א ראשים.
2. בניית טבלה המכילה את טווחי המולדות המתאימים לכל שנה משנות המחזור עבור סימן השנה המבוקש - החא.
3. קידום ערכי הטבלה מסעיף 2 ביתרון מחזור ומחיקת גבולות הנופלים בקבוצה מביין הקבוצות בטבלה.
4. מתוך הטבלה נבנה את דיאגרמת הדילוגים המבוקשת. לסיכום נראה שהדיאגרמה עונה לכללים שניסחנו עבור התכונות שהוצגו.

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

השנים שסימן השנה שלהם הוא החא הן שנים מעוברות.

היקריות של כל אזור

בלוח ס"א שבטבלה 13 הוספנו עמודה הנקראת היקרות. משמעה של עמודה זו הוא בכמה מחזורים במחזוריות הלוח נמצא את הרצף שמאפיין את צירוף 19 שנות המחזור עבור כל שורה.

כמובן, סך כל ההיקריות הוא 36288 (מחזוריות הלוח העברי 689472 שנים). אם נסכם את ההיקריות של כל שטח "צבוע" המציין שורה שבה מופיע סימן השנה התא נקבל 3811 היקריות במחזוריות הלוח העברי.

שלב 2 – טבלת טווחי המולדות

עתה נסרוק את טבלה מספר 13 מלמעלה למטה ונרשום עבור כל שטח צבוע את טווח המולדות, ונקבל:

שנה 6		שנה 3		שנה 17		שנה 14		שנה 11		שנה 8		שנה 19	
עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-	עד לא	החל מ-
54924	35869	71304	52249	102594	83539	118979	99924	135359	116304	151739	132684	17969	180354

טבלה 14 – טווחי המולדות עבור כל שנה

סדר הטבלה משמאל לימין נקבע על פי תחומי המולדות מהנמוך לגבוה. הסבר: לדוגמה שנה מספר 6, תחום המולדות בראש המחזור עבור סימן השנה החא נע מ- 35869 חלקים ועד (לא כולל) 54924 חלקים ועל זה הדרך בכל יתר שנות המחזור בהתאם לתחומיהן.

כדי שנוכל לבנות את תרשים הדילוגים נפעל על פי המתווה הבא: נוסיף יתרון מחזור (69715 חלקים) לגבול הפותח ולגבול הסוגר ונבדוק בכל שלב אם נופלים באחד מהשטחים של השנים האחרות, אם כן אזי נסמן חץ משנת המקור לשנת היעד עם דילוג השנים המתאים.

הערה: בטבלה 14 אנו רואים חפיפה בין תחומי שנה 6 לשנה 3 (שורה 9 בלוח ס"א), בין תחומי שנה 17 ל-14 (שורה 25 בלוח ס"א), בין תחומי שנה 14 לשנה 11 (שורה 30 בלוח ס"א), בין תחומי שנה 8 לשנה 11 (שורה 35 בלוח ס"א). משמעות הדבר היא שבאותו מחזור יהיו שני מופעים, לכן בדיאגרמת הדילוגים יהיה חץ בין שנה 3 ל-6 דילוג של 3 שנים, וכן בין שנה 8 ל-11, 11 ל-14, 14 ל-17.

שלב 3 – הוספת יתרון מחזור לערכי הטבלה

נדגים כמה מקרים.

ביחס לשנה 6:

	שנה 6	
A	החל מ-	עד לא כולל
	35869	54924
0	105584	124639

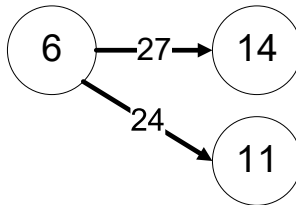
נוסיף יתרון מחזור לגבול הפותח ולגבול הסוגר ונקבל ערכים בין 105584 ובין 124639. נבדוק בתחומי השנים (בטבלה מספר 14) ונראה ש-105584 נופל בשנה מספר 14 ואילו 124639 נופל בשנה מספר 11. היות שיש רצף מספרי (ואף חפיפה) בתחומי שנה 14 ו-11 התהליך עבור שנה 6 מסתיים כאן. נציב במשוואה 2 (משוואת הדילוג) ונקבל:

$$\Delta = -n + m + 19(A + 1)$$

$$-6 + 14 + 19(0 + 1) = 27$$

$$-6 + 11 + 19(0 + 1) = 24$$

כלומר תתקבל דיאגרמה כזו:



ביחס לשנה 14:

	שנה 14	
A	החל מ-	עד לא כולל
	99924	118979
0	169639	7254
		180354
1	57914	68629

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

נוסיף יתרון מחזור (מודולו שבוע) לגבול הפותח ולגבול הסוגר ונקבל ערכים בין 169639 ועד 7254.

נבדוק בתחומי השנים (בטבלה מספר 14) ונראה ש-169639 לא נופל באחד מתחומי השנים ואילו 7254 נופל בתחום שנה מספר 19. עבור התחום הנופל בשנה מספר 19 משוואת הדילוג תהיה:

$$\Delta = -n + m + 19(A + 1)$$

$$= -14 + 19 + 19(0 + 1) = 24$$

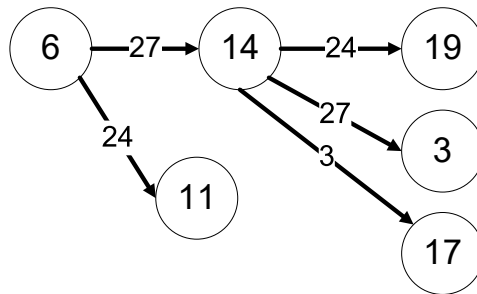
בשלב הבא נחליף את 7254 בגבול הפותח את שנה מספר 19, כלומר 180354, ונמשיך לצעד הבא כאשר התחום הוא החל מ-169639 עד 1800354, נוסיף יתרון מחזור (מודולו שבוע) ונקבל תחום החל מ-57914 ועד 68629 שניהם בתחום השנה 3, והתהליך מסתיים.

משוואת הדילוג תהיה:

$$\Delta = -n + m + 19(A + 1)$$

$$= -14 + 3 + 19(1 + 1) = 27$$

עתה הדיאגרמה גדלה כך:



נשים לב שהוספנו את הדילוג בין 3 השנים הנמצא בשורה מספר 25 בלוח ס"א ראשים.

ביחס לשנה 19 :

	שנה 19	
A	החל מ-	עד לא כולל
	180354	17969
0	68629	87684
	71304	83539
1	141019	153254
	151739	
2	40014	41529

נוסיף יתרון מחזור (מודולו שבוע) לגבול הפותח ולגבול הסוגר ונקבל ערכים בין 68629 לבין 87684. נבדוק בתחומי השנים (בטבלה מספר 14) ונראה ש-68629 נופל בתחום השורה 3 ואילו 87684 נופל בתחום שנה מספר 17. כלומר יהיו 2 דילוגים כדלהלן:

$$\begin{aligned}\Delta &= -n + m + 19(A + 1) \\ &= -19 + 3 + 19(0 + 1) = 3 \\ &= -19 + 17 + 19(0 + 1) = 17\end{aligned}$$

אולם מכיוון שאין חפיפה בין תחומי שנה 3 ו-17, לכן עלינו להחליף את 68629 בגבול הסוגר את שנה 3 כלומר 71304, ואת 87684 להחליף בגבול הפותח את שנה 17, כלומר 83539, ולהמשיך בתהליך.

נוסיף יתרון מחזור לשני מספרים אלו ונקבל תחום החל מ-141019 ועד 153254. היות ו-141019 נופל בתחום שנה 8, יהיה דילוג כדלהלן:

$$\begin{aligned}\Delta &= -n + m + 19(A + 1) \\ &= -19 + 8 + 19(1 + 1) = 27\end{aligned}$$

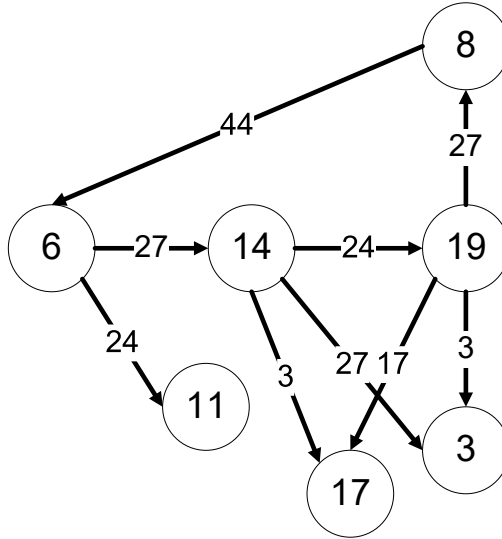
נחליף את 141019 במספר הסוגר את שנה 8, 151739, ונמשיך בתהליך עבור התחום מ-151739 ועד 153254. לאחר הוספת יתרון מחזור מודולו שבוע נקבל את התחום החל מ-40014 ועד 41529.

נבדוק בטבלה מספר 14 ונקבל ששני המספרים בתחום שנה 6. משוואת הדילוג תהיה:

$$\begin{aligned}\Delta &= -n + m + 19(A + 1) \\ &= -19 + 6 + 19(2 + 1) = 44\end{aligned}$$

לוח ס"א ראשים ככלי לבחינת הפרשי שנים בין מופעים חוזרים של סימני השנה

עתה הדיאגרמה גדלה ותיראה כך :



נערוך תהליך דומה עבור כל השנים והטבלה המלאה תיראה כך :

שנה 6		שנה 3		שנה 17		שנה 14		שנה 11		שנה 8		שנה 19	
החל מ-	עד לא בולל	החל מ-	עד לא בולל	החל מ-	עד לא בולל	החל מ-	עד לא בולל	החל מ-	עד לא בולל	החל מ-	עד לא בולל	החל מ-	עד לא בולל
35869	54924	52249	71304	83539	102594	99924	118979	116304	135359	132684	151739	180354	17969
105584	124639	121964	141019	153254	172309	169639	7254	4579	23634		40014	68629	87684
				41529	60584		180354	17969		20959	35869	71304	83539
						57914	68629	87684	93349	90674	105584	141019	153254
												151739	
												40014	41529

טבלה 15

ניתן לשים לב שלעיתים הוספת יתרון מחזור לתחומים הרלוונטיים מביאה אותנו לתחום שלא נופל באחד מהתחומים של שנה אחרת בטבלה, או אז עלינו שוב להוסיף יתרון מחזור ולברוק מחדש. תהליך זה נמשך עד שכל התחום ימופה.

ערן רביב

וטבלת הדילוגים תהיה:

משנה	לשנה	גודל הדילוג
6	14	27
6	11	24
3	11	27
3	8	24
3	6	3
17	6	27
17	3	24
14	3	27
14	19	24
14	17	3
11	19	27
11	17	44
11	14	3
8	6	17
8	17	47
8	14	44
8	11	3
19	3	3
19	17	17
19	8	27
19	6	44

טבלה 16

ערן רביב

דוגמה:

$$17+24-3=38 = 0 \pmod{19}$$

