

ערן רביב

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה

בחלק הראשון של המאמר נסביר כיצד ניתן לבנות לוח לסדרה בת n שנים (עבור $n=19$ מתקבל לוח בן 61 שורות = ס"א ראשים).
בחלקו השני של המאמר נציג את נוסחת יפה ונראה כיצד ניתן למצוא את החסם העליון לנכונות הנוסחה ע"י שימוש בלוח ס"א ראשים.
מאמר זה מהווה נדבך נוסף במחקרי הלוח העברי שראו אור מעל במה זו בגיליונות קודמים של בד"ד (22, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34).

הקדמה¹

סימן השנה

בלוח הקבוע ישנם 14 סוגי שנים,² כל שנה מסומנת בעזרת צירוף של שלוש אותיות: האות הראשונה מציינת את היום בו חל א' של ר"ה, האות השנייה מסמנת אם השנה חסרה, כסדרה או שלמה ולפי זה את מספר ימי השנה, והאות השלישית מציינת את היום בו חל ט"ו בניסן (פסח).

קוד זה נקרא קביעת השנה או סימן השנה, אותו אנו מוצאים בפתחם של לוחות שנה רבים. לדוגמה, שנת תשע"ז (שנה ראשונה במחזור = פשוטה):

- 1 תודות לפרופ' רון עדין מהמחלקה למתמטיקה באוניברסיטת בר-אילן שסקר את המאמר והציע שינויים לשיפור ששובצו במאמר.
- 2 7 לפשוטה ו-7 למעוברת. לחסרי רקע מומלץ לקרוא בספרו של רחמים שר שלום, שערים ללוח העברי, בהוצאת המחבר, וכן לעיין במאמרים שציינתי בהקדמה.

ערן רביב

| מולד תשרי | | | | דחייה | יום א' בתשרי | סימן השנה |
|--------------|-----|-----|-----|--------------------|--------------|-----------|
| שנה | יום | שעה | חלק | | | |
| 5777 (תשע"ז) | 0 | 20 | 724 | מולד זקן בשבת + א' | 2 | בחג |
| 5778 (תשע"ח) | 5 | 5 | 520 | ללא | 5 | הכז |

טבלה 1

בטבלה מס' 1 אנו רואים שלפי המולדות וכללי הדחיות ראש השנה ה'תשע"ז יחול ביום שני בשבוע, ואילו ראש השנה תשע"ח יחול ביום חמישי בשבוע, בין שני ראשי השנים יש שלושה ימים ולכן השנה "חסרה".

לוח ס"א ראשים

מחבר הלוח

בתחילת המאה ה"ג פורסם לוח חדשני ומהפכני – לוח ס"א ראשים. חיים יחיאל בורנשטיין³ מייחס אותו לריצב"א,⁴ אחד מבעלי התוספות, וזאת על סמך עדות אחת הנמצאת בקולופון⁵ של כתב יד של ספר עברונות משנת 1566, שם נכתב כדלהלן:

ועוד תיקן רבי שמשון שניץ י"ג שורות לידע מהן הקביעות ור' יצחק ב"ר אברהם אחיו תיקן ס"א שורות וחזרות הן ואין צורך בהם אח"כ ורב נחשון גאון תיקן י"ג שורות והן כתובים לפניך וגם אין הדבר נכון לגבוי לב.

בכתב יד מאוחר יותר⁶ מצאנו העתקה ברורה ומבוארת יותר של פסקה זו, השופכת אור על ביאור כוונת המחבר כדלהלן:

3 בחיבורו "דברי ימי העיבור האחרונים", התקופה טז (תמוז-אלול, תרפ"ב), עמ' 292. קישור לכרכי התקופה ניתן למצוא כאן: <https://search.library.utoronto.ca/details?2183946>

4 לוח ס"א ראשים. כאמור מיוחס לריצב"א (=ריב"א, רבנו יצחק בן אברהם מדמפייר, צרפת, אחיו של הר"ש משניץ, תלמיד רבנו תם ור"י הזקן, קרוב לשנת 1200).

5 המילה colophon נכנסה ללטינית מיוונית – κολοφών, שמשמעה פסגת הר.

6 מילר, יהודה בן שמואל רויטלינגן; 1649, ההעתקה היא מכתב יד נושן משנת שי"ב (1552) – כפי שהמעתיק כותב. ברלין – ספריית המדינה 3150.

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה

תיקן רב שמשון שניץ י"ג שורות לידע מהן הקביעות [אולי הכוונה לי"ג השורות שבלוח ארבעה שערים, ע"ד] ור' יצחק בר אברה' אחיו תיקן ס"א שורות והמה חמורות ואין צריך בהן אחכ רב נחשון גאון תיקן י"ג שורות והן חוזרין חלילה והן כתובים לפניך וגם אין הדבר נכון לנבוני לב לפי שי"ג פעמים ב' יו' תקצה אין הולכין בז'ז' שחסר תתק"ה חלקים וא"א שאותן תתק"ה חלקים לא ישנו בשנים או בשלושה מקומות הקביעות בתוך י"ג מחזורים ואפשר שגם הגאון' ידע החסרון ובשביל שאין חשש בדבר כ"א⁸ שנים מועטת לא הניח בשביל כך למסוד הלוח הטובה לעולם והניח הדבר לנבוני לב לסמנים בעלמא ולא לסמוך עליהם בלי חשבון כ"א לסמני בעלמא אחר החשבון וגם לפעמים הן מוטעי טעות סופר עד כאן מצאתי בספר עברונות ישן נושן נכתב בשנת שי"ב לפרט קטן.

מפענוח העתקה זו אנו משערים שכוונת המחבר לומר שלוח ס"א הוא מסובך מדי ("המה חמורות") ודי לנו במציאת סימן השנה מלוח ארבעה שערים.

הלוח מובא לראשונה⁹ בספר "יסוד עולם" לר"י הישראלי, ושם הוא מכנהו "הלוח שהמציאוהו החכמים האחרונים", ללא ציון שם מחברו.

הרעיון המהפכני המונח בבסיסו של לוח זה הוא שאם נחלק את שנות העולם לסדרות בנות 19 שנה כל אחת, נקבל 61 צירופים אפשריים של סימני הקביעות ותו לא! המצאה חדשנית זאת מאפשרת בחישוב אחד של מולד תשרי של ראש המחזור לדעת את סימני השנה של כל שנות המחזור.

זמין במרשתת בקישור: http://digital.staatsbibliothek-berlin.de/dms/werkansicht/?PPN=PPN635432978&PHYSID=PHYS_0094

7 "אין הולכין בז' ז'" כוונת הכותב שי"ג פעמים יתרון מחזור אינם כלים בשבועות שלמים אלא יש יתרון של מינוס 905 חלקים.

8 ראשי תיבות של "כי אם".

9 במהדורת דפוס.

ערן רביב

מולד תשרי של ראש מחזור

כפי שהצבעתי במאמרים קודמים,¹⁰ ספרת היחידות של מולד תשרי של ראש המחזור היא 4 או 11.9¹¹ ובהתאמה לכך, ספרת היחידות של מולד תשרי של כל שנה ושנה משנות המחזור מקבלת שתי אפשרויות בלבד. לשם הנוחות נתעלם כרגע מעובדה זו ונשוב לכך בחלקו השני של המאמר.

השימוש בלוח ס"א ראשים

כדי להשתמש בלוח זה, בשלב הראשון יש לחשב את מולד תשרי של ראש המחזור ובשלב השני לחפש בתחומי הראשים היכן התוצאה "נופלת". הנוסחה למציאת מולד תשרי של ראש המחזור בחלקים היא:

$$M = \left[57444 + 69715 * \text{int} \left[\frac{S - 1}{19} \right] \right] \pmod{181440}$$

משוואה 1

מציאת מולד תשרי של ראש המחזור, כדלהלן: השנה לבהר"ד מסומנת באות S, מפחיתים 1 מהשנה, מחלקים ב-19 ולוקחים את החלק השלם, מכפילים ביתרון מחזור, מוסיפים לבהר"ד ומפחיתים את השבועות השלמים. בדוגמה שראינו לעיל שנת תשע"ז (=5777) מולד תשרי "נופל" בתחום שורה 61 בלוח!

10 בעיקר במאמר "על מולדות ותכונותיהם", בד"ד 22.
11 הראשון שכתב זאת במפורש היה ככל הנראה ר' אברהם אבן עזרא בספר העיבור שלו (ותודה לידידי הרב ד"ר שי ואלטר שהפנה את תשומת ליבי למקור זה) וזה לשונו: "... ולעולם יהיו בו (=בראש המחזור. ע"ר) ארבעה חלקים אם המחזורים זוגות יהיו בו תשעה" (ספר העיבור בהוצאת שזח"ה, מקיצי נרדמים, ליק 1874, עמ' 2 בחלק ראשון). ואף בהמשך הספר הוא כותב: "...וישאר לכל מחזור להשלמת תקצ"ה חלקים חלק אחר הוסף על כל החלקים חלקים כמספר המחזורים וטעם להיות בו חלקים ארבעה אם מחזורים זוגות כי תקצ"ה יכפלו ישובו עשרה ואין שם אחדים והנה ישאר לעולם ד' בהרד' ואם יהיה נפרד יהיה בו תשעה". ייתכן שאף לפניו ר' אברהם בר' חייא הנשיא מודע לכך, ראו בהערת המו"ל (צבי פיליפובסקי, "ביאור מאמר קשה בשער התשיעי ממאמר שני מאת המסדר") וראו גם צבי פיליפובסקי בספרו "מועד מועדים", לונדון 1868, עמוד לד.

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה

בניית לוח ס"א ראשים

להלן נציג שתי שיטות לבניית לוח ס"א ראשים.

שיטה ראשונה: שיטת ר' יצחק הישראלי – לוח 'קל"ג מעמדות'

כאמור הלוח הוצג לראשונה על ידי ר' יצחק הישראלי בספרו "יסוד עולם". במאמר רביעי פרק י מבאר המחבר את אופן פיתוח לוח ס"א ראשים מתוך לוח קל"ג מעמדות.¹² קל"ג מעמדות הוא לוח הבנוי על היסוד שכל שנה משנות המחזור מכילה שבע אפשרויות לסימן השנה, המעבר מסימן לסימן מאופיין על ידי חציית "גבול" במולד חודש תשרי של השנה. שנות המחזור מחולקות לארבעה מינים כמו בלוח ארבעה שערים. העברת שבעת גבולות המולדות של כל שנה ושנה למולד תשרי של ראש המחזור תניב גבול לראש המחזור.

7 אפשרויות כפול 19 שנות המחזור מניבות טבלה בת 133 אפשרויות.

בבדיקת האפשרויות הוא מוצא ש-17 "ראשים" ("ראש" משמעו גבול פתיחת שורה חדשה) חוזרים על עצמם 3 פעמים, 38 "ראשים" חוזרים על עצמם 2 פעמים, ו-6 "ראשים" מופיעים פעם אחת בלבד. לאחר מחיקת האפשרויות המופיעות יותר מפעם אחת, בסיכום המספרים 17, 38, ו-6 נקבל 61 "ראשים".

כאמור, שיטה זו מתבססת על "אבני הבניין" של לוח ארבעה שערים.¹³ אבני הבניין הן השתנות סימני השנה עבור שנה בודדת.

ניתן לאפיין ארבע קבוצות של שנים,¹⁴ מכל קבוצה נבחר שנה מייצגת ונכתוב את סימני השנה של שנה זו בהתאם לגבולות של הדחיות, כדלהלן:

12 הלוח עצמו לא נמצא בכתב היד של הספר והמהדיר גולדברג שחזר אותו. באותה תקופה גם פיליפובסקי ("מועד מועדים") שחזר את הלוח וכל אחד מהמחברים טען "כולה שלי" (ראו דברי ימי העיבור האחרונים, לעיל הערה 3, עמ' 291). הספר "יסוד עולם" יצא לאור בשתי מהדורות דפוס, הראשונה הוצאה ע"י תלמיד הגר"א ר' ברוך שיק (משקלוב), ברלין תקל"ז, לאחר שהדפיס בברלין את שני חיבוריו "עמודי שמים" ו"תפארת אדם", הציע לו הרב צבי הירש לויין להדפיס את "יסוד עולם" מכתב יד שהיה בבעלותו. המהדורה השנייה היא מהדורת גולדברג ורוזנקרנץ שהותקנה בפורמט מדעי יותר.

13 ראו מאמרי "המבנה המתמטי של לוח ארבעה שערים וחישובי שכיחויות בלוח העברי", בד"ד 28 (תשע"ד), עמ' 113-128.

14 שם, עמ' 115.

ערן רביב

עבור הרצף של פשוטה שלפניה פשוטה ואחריה מעוברת (שנה 2 כמייצגת) נקבל:

| פריסת גבולות | | | | |
|--------------|-------|-----|-----|-----|
| בחלקים | שנה 2 | יום | שעה | חלק |
| 19440 | בחג | 0 | 18 | 0 |
| 35844 | בשה | 1 | 9 | 204 |
| 71280 | גכה | 2 | 18 | 0 |
| 87684 | הכז | 3 | 9 | 204 |
| 139524 | השא | 5 | 9 | 204 |
| 149040 | זחא | 5 | 18 | 0 |
| 165444 | זשג | 6 | 9 | 204 |

טבלה 2

עבור הרצף של פשוטה שלפניה מעוברת ואחריה פשוטה (שנה 1 כמייצגת) נקבל:

| פריסת גבולות | | | | |
|--------------|-------|-----|-----|-----|
| בחלקים | שנה 1 | יום | שעה | חלק |
| 19440 | בחג | 0 | 18 | 0 |
| 35844 | בשה | 1 | 9 | 204 |
| 68629 | גכה | 2 | 15 | 589 |
| 87684 | הכז | 3 | 9 | 204 |
| 139524 | השא | 5 | 9 | 204 |
| 149040 | זחא | 5 | 18 | 0 |
| 155928 | זשג | 6 | 0 | 408 |

טבלה 3

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה

עבור הרצף של פשוטה בין שתי מעוברות (שנה 7 כמייצגת) נקבל:

| פריסת גבולות | | | | |
|--------------|-------|-----|-----|-----|
| בחלקים | שנה 7 | יום | שעה | חלק |
| 19440 | בחג | 0 | 18 | 0 |
| 35844 | בשה | 1 | 9 | 204 |
| 68629 | גכה | 2 | 15 | 589 |
| 87684 | הכז | 3 | 9 | 204 |
| 139524 | השא | 5 | 9 | 204 |
| 149040 | זחא | 5 | 18 | 0 |
| 165444 | זשג | 6 | 9 | 204 |

טבלה 4

עבור הרצף של מעוברות (שנה 3 כמייצגת) נקבל:

| פריסת גבולות | | | | |
|--------------|-------|-----|-----|-----|
| חלקים | שנה 3 | יום | שעה | חלק |
| 19440 | בחה | 0 | 18 | 0 |
| 48011 | בשז | 1 | 20 | 491 |
| 71280 | גכז | 2 | 18 | 0 |
| 97200 | החא | 3 | 18 | 0 |
| 116255 | השג | 4 | 11 | 695 |
| 149040 | זחג | 5 | 18 | 0 |
| 177611 | זשה | 6 | 20 | 491 |

טבלה 5

שיטת בורנשטיין

בורנשטיין (תרפ"ב-ג)¹⁵ הציג שיטה קצרה יותר. הוא מעביר את גבולות הדחיות ליום ראש השנה של כל שנה משנות המחזור (כולל שנה 20)¹⁶ למולד ראש מחזור. בכל שנה ישנם ארבעה

15 דברי ימי העבור האחרונים (לעיל הערה 3), סעיף לה, עמ' 285 ואילך.
 16 כי שינוי ביום ר"ה ה-20 משנה את האות האמצעית של סימן השנה ה-19 במחזור.

ערן רביב

ימים שראש השנה יכול לחול בהם (ב,ג,ה,ז). בשיטה זו אנו מחלקים את השנים לשלוש¹⁷ קבוצות מאפיינות כדלהלן:

| אחרי עיבור (1,4,7,9,12,15,18) | | | | | |
|-------------------------------|-----|-----|-----|---------------------|------------|
| בחלקים | חלק | שעה | יום | יום ר"ה לאחר הדחייה | דחייה |
| 19440 | 0 | 18 | 0 | ב | זקן בשבת |
| 68629 | 589 | 15 | 2 | ג | בטו תקפט |
| 87684 | 204 | 9 | 3 | ה | גטר"ד |
| 149040 | 0 | 18 | 5 | ז | זקן בחמישי |

טבלה 6

| מעוברות (3,6,8,11,14,17,19) | | | | | |
|-----------------------------|-----|-----|-----|---------------------|------------|
| בחלקים | חלק | שעה | יום | יום ר"ה לאחר הדחייה | דחייה |
| 19440 | 0 | 18 | 0 | ב | זקן בשבת |
| 71280 | 0 | 18 | 2 | ג | זקן בשני |
| 97200 | 0 | 18 | 3 | ה | זקן בשלישי |
| 149040 | 0 | 18 | 5 | ז | זקן בחמישי |

טבלה 7

| פשוטה אחר פשוטה (2,5,10,13,16) | | | | | |
|--------------------------------|-----|-----|-----|---------------------|------------|
| בחלקים | חלק | שעה | יום | יום ר"ה לאחר הדחייה | דחייה |
| 19440 | 0 | 18 | 0 | ב | זקן בשבת |
| 71280 | 0 | 18 | 2 | ג | זקן בשני |
| 87684 | 204 | 9 | 3 | ה | גטר"ד |
| 149040 | 0 | 18 | 5 | ז | זקן בחמישי |

טבלה 8

17 שלוש קבוצות ולא ארבע כמקודם מהסיבה שמעניינים אותנו רק גבולות תשרי של השנה הנוכחית.

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה

העברת גבולות הדחיות לראש המחזור = 'שיקוף'

כדי להעביר לראש המחזור את גבולות הדחיות של כל שנה עלינו להפחית את יתרון סך החודשים שחלפו מתחילת המחזור ועד שנה זו (לא כולל).

נסמן:

$g_{n,i}$ – גבול השתנות סימן השנה i בשנה n (בחלקים).

כאשר i מקבל את כל ערכי הגבולות בהתאם לדחיות יום ראש השנה (בטבלאות 6, 7, 8 לעיל).

$R_{n,i}$ – ראש מחזור המתאים לגבול i בשנה n (בחלקים).

M_n – סך החודשים שחלפו מתחילת המחזור ועד מולד תשרי של השנה ה- n -ית, נתון בנוסחה:¹⁸

$$M_n = \text{int} \left[\frac{235(n-1) + 1}{19} \right]$$

משוואה 2

39673 – יתרון חודש בחלקים, 181440 – שבוע בחלקים.

נוסחת השיקוף:

$$R_{n,i} = [g_{n,i} - (M * 39673)] \pmod{181440}$$

משוואה 3

נציב בנוסחה זו את כל הדחיות עבור כל 20 השנים. כל שנה תורמת 4 ראשים $20 * 4 = 80$, בהפחתת 19 כפולים נגיע ל-61 ראשים.

שיפור רצ"ה יפה

יפה בספרו "קורות חשבון העבור" משפר את שיטת בורנשטיין ומכליל את השיטה למציאת צירופי סימני השנה לא רק ל-19 שנים אלא לכל רצף שנים שהוא.

יפה מסביר¹⁹ שאומנם לכל שנה ארבעה גבולות,²⁰ אבל כל שנה "מייצרת" גבול אחד שכבר נמצא על ידי אחת הדחיות של השנה שקדמה לה, לפיכך קובע יפה שבכל צירוף של n שנים עוקבות תמיד יימצאו $3n+4$ ראשים.²¹ עבור $n=19$ נקבל כמובן 61.

18 הנוסחה בצורתה זו פותחה ע"י אינג' יעקב לוינגר בספרו "על השמינית", מהדורת המחבר 1986 (הספר זמין במרשתת באתר דעת). ראו הוכחה בנספח.

19 עמ' ר-רא.

20 גבול ערך של מולד תשרי שממנו והלאה סימן השנה משתנה.

21 עמ' קסח בהערה.

ערן רביב

| תוצאת השיקוף לראש המחזור | | | | | | | | | | הפחתת יתרון סך M = חודשים |
|--------------------------|-----|-----|--------|------------|------------|-----|-----|-----|--------|------------------------------|
| יום | שעה | חלק | בחלקים | שנה במחזור | דחייה | יום | שעה | חלק | בחלקים | |
| 0 | 18 | 0 | 19440 | 1 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 0 |
| 2 | 15 | 589 | 68629 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 589 | 68629 | 0 |
| 3 | 9 | 204 | 87684 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 0 |
| 5 | 18 | 0 | 149040 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 0 |
| 3 | 9 | 204 | 87684 | 2 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 12 |
| 5 | 9 | 204 | 139524 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 12 |
| 6 | 0 | 408 | 155928 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 12 |
| 1 | 9 | 204 | 35844 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 12 |
| 6 | 0 | 408 | 155928 | 3 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 24 |
| 1 | 0 | 408 | 26328 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 24 |
| 2 | 0 | 408 | 52248 | | זקן בשלישי | 3 | 18 | 0 | 97200 | 24 |
| 4 | 0 | 408 | 104088 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 24 |
| 0 | 2 | 899 | 3059 | 4 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 37 |
| 2 | 0 | 408 | 52248 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 589 | 68629 | 37 |
| 2 | 18 | 23 | 71303 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 37 |
| 5 | 2 | 899 | 132659 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 37 |
| 2 | 18 | 23 | 71303 | 5 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 49 |
| 4 | 18 | 23 | 123143 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 49 |
| 5 | 9 | 227 | 139547 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 49 |
| 0 | 18 | 23 | 19463 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 49 |
| 5 | 9 | 227 | 139547 | 6 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 61 |
| 0 | 9 | 227 | 9947 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 61 |
| 1 | 9 | 227 | 35867 | | זקן בשלישי | 3 | 18 | 0 | 97200 | 61 |
| 3 | 9 | 227 | 87707 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 61 |
| 6 | 11 | 718 | 168118 | 7 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 74 |
| 1 | 9 | 227 | 35867 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 589 | 68629 | 74 |
| 2 | 2 | 922 | 54922 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 74 |
| 4 | 11 | 718 | 116278 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 74 |
| 2 | 2 | 922 | 54922 | 8 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 86 |
| 4 | 2 | 922 | 106762 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 86 |
| 5 | 2 | 922 | 132682 | | זקן בשלישי | 3 | 18 | 0 | 97200 | 86 |
| 0 | 2 | 922 | 3082 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 86 |
| 3 | 5 | 333 | 83493 | 9 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 99 |
| 5 | 2 | 922 | 132682 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 589 | 68629 | 99 |
| 5 | 20 | 537 | 151737 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 99 |
| 1 | 5 | 333 | 31653 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 99 |
| 5 | 20 | 537 | 151737 | 10 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 111 |
| 0 | 20 | 537 | 22137 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 111 |
| 1 | 11 | 741 | 38541 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 111 |
| 3 | 20 | 537 | 99897 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 111 |

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה

| תוצאת השיקוף לראש המחזור | | | | | | | | | | |
|--------------------------|-----|------|--------|------------|------------|-----|-----|-----|--------|-----------------------|
| יום | שעה | חלק | בחלקים | שנה במחזור | דחייה | יום | שעה | חלק | בחלקים | הפחתת יתרון סך M = |
| יום | שעה | חלק | בחלקים | | דחייה | יום | שעה | חלק | בחלקים | הפחתת יתרון סך M = |
| 3 | 11 | 741 | 90381 | 11 | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 123 |
| 4 | 11 | 741 | 116301 | | זקן בשלישי | 3 | 18 | 0 | 97200 | 123 |
| 6 | 11 | 741 | 168141 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 123 |
| 2 | 14 | 152 | 67112 | 12 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 136 |
| 4 | 11 | 741 | 116301 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 589 | 68629 | 136 |
| 5 | 5 | 356 | 135356 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 136 |
| 0 | 14 | 152 | 15272 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 136 |
| 5 | 5 | 356 | 135356 | 13 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 148 |
| 0 | 5 | 356 | 5756 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 148 |
| 0 | 20 | 560 | 22160 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 148 |
| 3 | 5 | 356 | 83516 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 148 |
| 0 | 20 | 560 | 22160 | 14 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 160 |
| 2 | 20 | 560 | 74000 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 160 |
| 3 | 20 | 560 | 99920 | | זקן בשלישי | 3 | 18 | 0 | 97200 | 160 |
| 5 | 20 | 560 | 151760 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 160 |
| 1 | 22 | 1051 | 50731 | 15 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 173 |
| 3 | 20 | 560 | 99920 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 589 | 68629 | 173 |
| 4 | 14 | 175 | 118975 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 173 |
| 6 | 22 | 1051 | 180331 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 173 |
| 4 | 14 | 175 | 118975 | 16 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 185 |
| 6 | 14 | 175 | 170815 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 185 |
| 0 | 5 | 379 | 5779 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 185 |
| 2 | 14 | 175 | 67135 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 185 |
| 0 | 5 | 379 | 5779 | 17 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 197 |
| 2 | 5 | 379 | 57619 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 197 |
| 3 | 5 | 379 | 83539 | | זקן בשלישי | 3 | 18 | 0 | 97200 | 197 |
| 5 | 5 | 379 | 135379 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 197 |
| 1 | 7 | 870 | 34350 | 18 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 210 |
| 3 | 5 | 379 | 83539 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 589 | 68629 | 210 |
| 3 | 22 | 1074 | 102594 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 210 |
| 6 | 7 | 870 | 163950 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 210 |
| 3 | 22 | 1074 | 102594 | 19 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 222 |
| 5 | 22 | 1074 | 154434 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 | 222 |
| 6 | 22 | 1074 | 180354 | | זקן בשלישי | 3 | 18 | 0 | 97200 | 222 |
| 1 | 22 | 1074 | 50754 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 222 |
| 5 | 1 | 485 | 131165 | 20 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 | 235 |
| 6 | 22 | 1074 | 180354 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 589 | 68629 | 235 |
| 0 | 16 | 689 | 17969 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 | 235 |
| 3 | 1 | 485 | 79325 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 | 235 |

טבלה 9

ערן רביב

טבלה מספר 9 מדגימה שיקוף של 9 שנים לראש המחזור.
 רואים כיצד בכל שנה נמצא גבול שנמצא כבר על ידי השנה שקדמה לו.²²
 מכיוון שמולד תשרי חל בקפיצות של 5 חלקים, טבלה מספר 9 המתוקנת תראה כך:

| תוצאת השיקוף לראש המחזור | | | | שנה במחזור | דח"ה | יום | שעה | חלק | בחלקים |
|--------------------------|-----|-----|--------|------------|------------|-----|-----|-----|--------|
| יום | שעה | חלק | בחלקים | | | | | | |
| 0 | 18 | 4 | 19444 | 1 | זקן בשבת | 0 | 18 | 4 | 19444 |
| 2 | 15 | 589 | 68629 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 589 | 68629 |
| 3 | 9 | 204 | 87684 | | גטר"ד | 3 | 9 | 204 | 87684 |
| 5 | 18 | 4 | 149044 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 4 | 149044 |
| 3 | 9 | 204 | 87684 | 2 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 |
| 5 | 9 | 204 | 139524 | | זקן בשני | 2 | 18 | 0 | 71280 |
| 6 | 0 | 409 | 155929 | | גטר"ד | 3 | 9 | 205 | 87685 |
| 1 | 9 | 204 | 35844 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 |
| 6 | 0 | 409 | 155929 | 3 | זקן בשבת | 0 | 18 | 1 | 19441 |
| 1 | 0 | 409 | 26329 | | זקן בשני | 2 | 18 | 1 | 71281 |
| 2 | 0 | 409 | 52249 | | זקן בשלישי | 3 | 18 | 1 | 97201 |
| 4 | 0 | 409 | 104089 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 1 | 149041 |
| 0 | 2 | 899 | 3059 | 4 | זקן בשבת | 0 | 18 | 0 | 19440 |
| 2 | 0 | 409 | 52249 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 590 | 68630 |
| 2 | 18 | 24 | 71304 | | גטר"ד | 3 | 9 | 205 | 87685 |
| 5 | 2 | 899 | 132659 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 0 | 149040 |
| 2 | 18 | 24 | 71304 | 5 | זקן בשבת | 0 | 18 | 1 | 19441 |
| 4 | 18 | 24 | 123144 | | זקן בשני | 2 | 18 | 1 | 71281 |
| 5 | 9 | 229 | 139549 | | גטר"ד | 3 | 9 | 206 | 87686 |
| 0 | 18 | 24 | 19464 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 1 | 149041 |
| 5 | 9 | 229 | 139549 | 6 | זקן בשבת | 0 | 18 | 2 | 19442 |
| 0 | 9 | 229 | 9949 | | זקן בשני | 2 | 18 | 2 | 71282 |
| 1 | 9 | 229 | 35869 | | זקן בשלישי | 3 | 18 | 2 | 97202 |
| 3 | 9 | 229 | 87709 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 2 | 149042 |
| 6 | 11 | 719 | 168119 | 7 | זקן בשבת | 0 | 18 | 1 | 19441 |
| 1 | 9 | 229 | 35869 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 591 | 68631 |
| 2 | 2 | 924 | 54924 | | גטר"ד | 3 | 9 | 206 | 87686 |
| 4 | 11 | 719 | 116279 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 1 | 149041 |
| 2 | 2 | 924 | 54924 | 8 | זקן בשבת | 0 | 18 | 2 | 19442 |
| 4 | 2 | 924 | 106764 | | זקן בשני | 2 | 18 | 2 | 71282 |
| 5 | 2 | 924 | 132684 | | זקן בשלישי | 3 | 18 | 2 | 97202 |
| 0 | 2 | 924 | 3084 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 2 | 149042 |
| 3 | 5 | 334 | 83494 | 9 | זקן בשבת | 0 | 18 | 1 | 19441 |
| 5 | 2 | 924 | 132684 | | בטו תקפט | 2 | 15 | 591 | 68631 |
| 5 | 20 | 539 | 151739 | | גטר"ד | 3 | 9 | 206 | 87686 |
| 1 | 5 | 334 | 31654 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 1 | 149041 |
| 5 | 20 | 539 | 151739 | 10 | זקן בשבת | 0 | 18 | 2 | 19442 |
| 0 | 20 | 539 | 22139 | | זקן בשני | 2 | 18 | 2 | 71282 |
| 1 | 11 | 744 | 38544 | | גטר"ד | 3 | 9 | 207 | 87687 |
| 3 | 20 | 539 | 99899 | | זקן בחמישי | 5 | 18 | 2 | 149042 |

22 הסיבה לכך היא ששתי הדחיות האחרונות הן דחיות שנובעות מאורך השנה ותלויות במולד השנה

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה

| תוצאת השיקוף לראש המחזור | | | | בחלקים | חלק | שעה | יום | דחייה | |
|--------------------------|-----|------|--------|--------|-----|-----|-----|------------|--------|
| יום | שעה | חלק | בחלקים | | | | | | |
| 3 | 11 | 744 | 90384 | 11 | 3 | 18 | 2 | זקן בשני | 71283 |
| 4 | 11 | 744 | 116304 | | | | | זקן בשלישי | 97203 |
| 6 | 11 | 744 | 168144 | | | | | זקן בחמישי | 149043 |
| 2 | 14 | 154 | 67114 | 12 | 2 | 18 | 0 | זקן בשבת | 19442 |
| 4 | 11 | 744 | 116304 | | | | | בטו תקפט | 68632 |
| 5 | 5 | 359 | 135359 | | | | | גטר"ד | 87687 |
| 0 | 14 | 154 | 15274 | 13 | 2 | 18 | 5 | זקן בחמישי | 149042 |
| 5 | 5 | 359 | 135359 | | | | | זקן בשבת | 19443 |
| 0 | 5 | 359 | 5759 | | | | | זקן בשני | 71283 |
| 0 | 20 | 564 | 22164 | 14 | 3 | 9 | 208 | גטר"ד | 87688 |
| 3 | 5 | 359 | 83519 | | | | | זקן בחמישי | 149043 |
| 0 | 20 | 564 | 22164 | | | | | זקן בשבת | 19444 |
| 2 | 20 | 564 | 74004 | 15 | 4 | 18 | 2 | זקן בשני | 71284 |
| 3 | 20 | 564 | 99924 | | | | | זקן בשלישי | 97204 |
| 5 | 20 | 564 | 151764 | | | | | זקן בחמישי | 149044 |
| 1 | 22 | 1054 | 50734 | 16 | 3 | 18 | 0 | זקן בשבת | 19443 |
| 3 | 20 | 564 | 99924 | | | | | בטו תקפט | 68633 |
| 4 | 14 | 179 | 118979 | | | | | גטר"ד | 87688 |
| 6 | 22 | 1054 | 180334 | 17 | 3 | 18 | 5 | זקן בחמישי | 149043 |
| 4 | 14 | 179 | 118979 | | | | | זקן בשבת | 19444 |
| 6 | 14 | 179 | 170819 | | | | | זקן בשני | 71284 |
| 0 | 5 | 379 | 5779 | 18 | 4 | 9 | 204 | גטר"ד | 87684 |
| 2 | 14 | 179 | 67139 | | | | | זקן בחמישי | 149044 |
| 0 | 5 | 379 | 5779 | | | | | זקן בשבת | 19440 |
| 2 | 5 | 379 | 57619 | 19 | 0 | 18 | 2 | זקן בשני | 71280 |
| 3 | 5 | 379 | 83539 | | | | | זקן בשלישי | 97200 |
| 5 | 5 | 379 | 135379 | | | | | זקן בחמישי | 149040 |
| 1 | 7 | 874 | 34354 | 20 | 4 | 18 | 0 | זקן בשבת | 19444 |
| 3 | 5 | 379 | 83539 | | | | | בטו תקפט | 68629 |
| 3 | 22 | 1074 | 102594 | | | | | גטר"ד | 87684 |
| 6 | 7 | 874 | 163954 | 19 | 4 | 18 | 5 | זקן בחמישי | 149044 |
| 3 | 22 | 1074 | 102594 | | | | | זקן בשבת | 19440 |
| 5 | 22 | 1074 | 154434 | | | | | זקן בשני | 71280 |
| 6 | 22 | 1074 | 180354 | 20 | 0 | 18 | 2 | זקן בשלישי | 97200 |
| 1 | 22 | 1074 | 50754 | | | | | זקן בחמישי | 149040 |
| 5 | 1 | 489 | 131169 | | | | | זקן בשבת | 19444 |
| 6 | 22 | 1074 | 180354 | 20 | 4 | 18 | 2 | בטו תקפט | 68629 |
| 0 | 16 | 689 | 17969 | | | | | גטר"ד | 87684 |
| 3 | 1 | 489 | 79329 | | | | | זקן בחמישי | 149044 |

טבלה 10

הבאה או הקודמת. הסבר: ג'ט'ר"ד בפשוטה נועדה למנוע שנה פשוטה בת 356 ימים כי אם נוסף לג' ט' ר"ד יתרון שנה פשוטה ניפול על גבול מולד זקן בשבת. ובאופן דומה מולד זקן ביום שלישי בשנה מעוברת בהוספת יתרון מעוברת נופל על ב'ט"ז תקפ"ט, דחייה זו נועדה למנוע מצב של שנה מעוברת בת 382 ימים.

החסם העליון לנוסחת יפה

ברור שנוסחת יפה נכונה עד מחזור שבו גבולות "יעלו" על גבולות אחרים. לשם דוגמה אם נבחר סדרה בת 689,472 שנים (מחזוריות המולדות בלוח העברי) אזי בלוח יהיו 36,288 שורות, כך שגבול כל שורה הוא מולד בודד בלבד. במקרה זה כל השורות שוות ביניהן כי כולן נגזרות משורה אחת ציקלית "הנחתכת" בכל פעם בדילוג של 19 שנים קדימה. אם כן השאלה הנשאלת היא מהו אורך סדרת השנים שעד אליה נוסחת יפה תקפה בניסוחה המקורי והחל משם ואילך מתחילים "הקיפולים" (ראו נספח מספר 3).

ניסוח מתמטי של הבעיה

נסמן דחייה i בשנה $d_{s,i} - s$

דחייה j בשנה $d_{s',j} - s'$

עלינו לבדוק מהו ה- n המינימלי שבו מתקיים:

$$d_{s',j} = d_{s,i} - n \text{ (מודולו שבוע) יתרון } n \text{ שנים}$$

משוואה 4

כיוון הפתרון

כל גבול במהלך 19 שנות המחזור מיוצג חד ערכית²³ על ידי ראש מחזור בלוח ס"א ראשים, אי לכך נוכל להתייחס לבעיה שקולה כדלהלן:

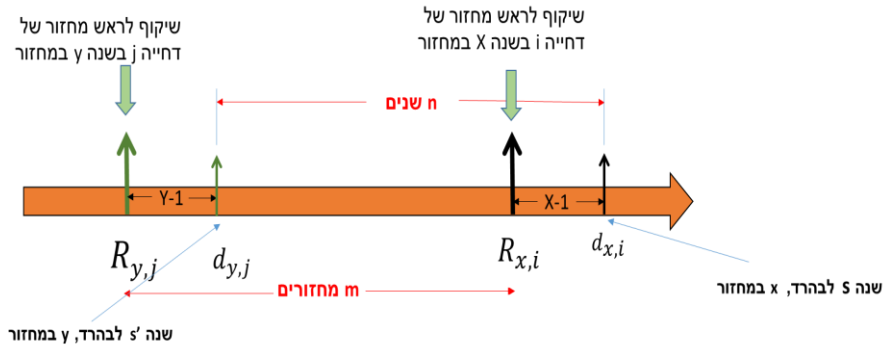
$$R_{x,i} = R_{y,j} + m \text{ מחזורים } m \text{ (מודולו שבוע) יתרון}$$

משוואה 5

23 שקול מודולו יתרון שנים.

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה

נמחיש את השקילות של שתי הבעיות בעזרת התרשים הבא:



איור 1

הסבר איור 1

במולד תשרי של שנה x יש גבול דחייה מסוג i , ניתן לשקף גבול זה לראש המחזור ולקבל את הגבול השקול לראש המחזור $R_{x,i}$, באופן דומה במולד תשרי של שנה y יש גבול דחייה מסוג j ואותו ניתן לשקף לראש המחזור ולקבל את הגבול השקול (מודולו שבוע) $R_{y,j}$.

$$m, n \in \mathbb{Z}$$

39673 – יתרון חודש בחלקים.

M_x – סך החודשים מתחילת מחזור ועד שנה X (עד ולא בכלל).²⁴

M_y – סך החודשים מתחילת מחזור ועד שנה y (עד ולא בכלל).²⁵

$$R_{x,i} \equiv d_{x,i} - [M_x * 39673](\text{mod } 181440)$$

$$R_{y,j} \equiv d_{y,j} - [M_y * 39673](\text{mod } 181440)$$

אם

$$R_{y,j} \equiv R_{x,i} - [m * \text{מחזור}](\text{mod } 181440)$$

²⁴ משוואה מספר 2 לעיל.

²⁵ כנ"ל.

ערן רביב

אז

$$d_{y,j} \equiv d_{x,i} - [יתרון n שנים] \pmod{181440}$$

ולכן הבעיה שקולה להצגה המקורית.
עתה המרנו את הבעיה לבעיה קלה יותר לפתרון. מכיוון שבין שני ראשי המחזור יש מספר שלם של מחזורים (לפי הגדרה) נותר לנו לבדוק:
את כל הצירופים של הדחיות (בזוגות) $\{d_{s,i}, d_{s',j}\}$ המשוקפות לראש המחזור, כלומר (הזוגות $\{R_{y,j}, R_{x,i}\}$). בחישוב זה עלינו להתייחס לגבולות המעשיים של לוח ס"א ראשים (טבלה מספר 12 להלן) ולא לגבולות התיאורטיים!

אנו מחפשים פתרון למשוואה:

$$R_{y,j} + m * מחזור = R_{x,i} \pmod{181440}$$

משוואה 6

נציב יתרון מחזור בחלקים:

$$R_{y,j} + m * 69715 = R_{x,i} \pmod{181440}$$

מכיוון שכל ראש מחזור מסתיים בספרה 4 או 9, הפרשם מתחלק ב-5!

$$m * 69715 = (R_{x,i} - R_{y,j}) \pmod{181440}$$

מכיוון שהמחלק המשותף המקסימלי של יתרון מחזור ושבע הוא 5 מותר לחלק את המשוואה בחמש (כולל בסיס המודולו (משפט מתמטי!)):

$$m * 13943 = \left[\frac{(R_{x,i} - R_{y,j})}{5} \right] \pmod{36288}$$

משוואה 7

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה

בעזרת אלגוריתם אוקלידס נמצא את ההופכי של 13943 מודולו 36288 ונקבל 6215.²⁶
 נכפיל ונקבל את הנוסחה הכללית:

$$m = [(R_{x,i} - R_{y,j}) * 1243] \pmod{36288}$$

משוואה 8

עתה, כדי למצוא את החסם המבוקש, יש לכתוב את אוסף המשוואות הנובע מצירופי הזוגות של הראשים בלוח ס"א ראשים [סדר חשוב] (= 3660 זוגות!), ולחפש את ה-m המינימלי!

26 בדיקת ההופכי ע"י אלגוריתם אוקלידס:

| Step(i) | r _i | y _i | x _i | q _i |
|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1 | 36288 | 1 | 0 | |
| 2 | 13943 | 0 | 1 | |
| 3 | 8402 | 1 | -2 | 2 |
| 4 | 5541 | -1 | 3 | 1 |
| 5 | 2861 | 2 | -5 | 1 |
| 6 | 2680 | -3 | 8 | 1 |
| 7 | 181 | 5 | -13 | 1 |
| 8 | 146 | -73 | 190 | 14 |
| 9 | 35 | 78 | -203 | 1 |
| 10 | 6 | -385 | 1002 | 4 |
| 11 | 5 | 2003 | -5213 | 5 |
| 12 | 1 | -2388 | 6215 | 1 |
| 13 | 0 | 13943 | -36288 | 5 |

משוואות הרקורסיה:

$$r_i = a * x_i + b * y_i$$

$$x_1 = 0, y_1 = 1$$

$$x_1 = 1, y_1 = 0$$

$$a = 13943, b = 36288$$

$$q_i = \text{int} \left[\frac{r_{i-2}}{r_{i-1}} \right]$$

$$x_i = x_{i-2} - q_i * x_{i-1}$$

$$y_i = y_{i-2} - q_i * y_{i-1}$$

ערן רביב

חישבנו באקסל את כל 3660 המשוואות, לאחר מיון המשוואות קיבלנו שערכו המינימלי של m הוא 29, כלומר במחזור ה-30:27

| m | מולד מוצא R_{x_i} | מולד יעד R_{y_i} | שורה בלוח |
|-----|---------------------|--------------------|-----------|
| 29 | 99899 | 74004 | 16 |
| 29 | 116279 | 90384 | 23 |
| 29 | 132659 | 106764 | 28 |
| 29 | 15274 | 170819 | 48 |
| 29 | 31654 | 5759 | 53 |
| 29 | 35844 | 9949 | 55 |

טבלה 11

הסבר טבלה מס' 11: טבלה זו מציגה את הערכים שהתקבלו עבור ערכו המינימלי של m . עמודה "שורה בלוח" משמעה השורה המתאימה בלוח ס"א ראשים. מולד מוצא ומולד יעד כוונתם שבחלוף m מחזורים שיקוף מולד המוצא לראש הסדרה ייפול על מולד היעד ולכן הוא נקרא "קיפול". לדוגמה, בשורה הראשונה בטבלה אנו רואים שאם נשקף את מולד המוצא (גבול שורה 24 בלוח ס"א ראשים = 99899) לאחור 29 מחזורים נקבל את מולד היעד 74004 (=גבול שורה מספר 16 בלוח ס"א ראשים).

עתה נבדוק בלוח ס"א ראשים הן בשורה מספר 16 והן בשורה מספר 24 מהן השנים במחזור שגרמו לגבול זה להיפתח, ונראה שבשורה 16 שנה מספר 13 במחזור סימנה משתנה מ-הכז ל-השא. שינוי זה נגרם כמובן ממולד זקן ביום ב' בשנה ה-14 במחזור. בשורה 24 נראה באופן דומה שסימן השנה התשיעית במחזור משתנה מ-בחג ל-בשה, שינוי הנובע ממולד זקן ביום חמישי בראש השנה העשירית.

אמור מעתה ששיקוף מולד זקן בראש השנה העשירית במחזור לראש סדרה בת 30 מחזורים ייפול בדיוק על מולד זקן ביום ב' בשנה ה-14 במחזור.

עתה נבחן את כל השורות שמצאנו עבור m המינימלי (טבלה מס' 11) ונראה שהקיפול הראשון מתבצע במחזור ה-30, בשורה האחרונה בטבלה 11, 35844 – מולד זקן ביום חמישי

27 מכיוון שבמחזור ה-30 יש 6 גבולות ש"נדרסים", אכן בבדיקת 570 שנה (30 מחזורים), התקבלו רק 1708 גבולות במקום 1714 על פי נוסחת יפה.

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה

בשנה שנייה במחזור (=שורה רביעית בלוח ס"א ראשים), 9949 – מולד זקן ביום שני בשנה 6
במחזור (שורה מספר 55 בלוח ס"א ראשים).

מסקנה, נוסחת יפה המתוקנת

עבור סדרת סימני n שנים, עבור $n < 553$, יתקבלו $3n+4$ שורות של צירופים שונים של
סדרות של סימני השנים!

ערן רביב

נספחים

1. לוח ס"א ראשים

בטבלה מספר 12 הבאנו את לוח ס"א ראשים.

הערות:

1. גבולות הראשים הם "מתוקנים" כך שלעולם ספרת היחידות היא 4 או 9.
2. בין שורה לשורה רואים אנו משבצות מסומנות, משבצות אלו מסמנות את השנים שבהן סימן השנה השתנה במעבר משורה לשורה, כלומר הן הגורם לפתיחת גבול חדש. לדוגמה:
בשורה מספר 1 רואים ששנים 2 ו-3 "מוכהות", וזאת מפני שבשורה 61 סימן שנים אלו שונה, כדלהלן:

| שנה שלישית במחזור | שנה שנייה במחזור | שנה שורה |
|-------------------|------------------|----------|
| גכז | השא | 1 |
| בשז | הכז | 61 |

1. אנו רואים שסימן השנה השנייה במחזור, בשורה הראשונה, משתנה ל-השא מ-הכז, כלומר יום ראש השנה אינו משתנה אבל השנה מתארכת ביום אחד. סיבת התארכות השנה נובעת מגבול דחייה בראש השנה השלישית במחזור. בשורה מס' 61 אנו מבחינים שיום ראש השנה היה ביום ב' ואילו בשורה מס' 1 הוא ביום ג'. מכיוון שהשנה השנייה במחזור אינה מעוברת, סיבת השינוי היא מולד זקן ביום שני בשבוע. אמור מעתה ששיקוף של מולד זקן ביום שני בשנה השלישית במחזור לראש המחזור הוא הגבול הפותח את שורה מספר 1 בלוח (ניתן לראות זאת בטבלה מספר 10 לעיל).
וכן על זו הדרך.
3. כמו כן הוספנו עמודת היקרויות לכל שורה וניתן לראות שסך ההיקרויות הוא 36288 ולכן לוח זה שקול למחזוריות המולדות בלוח העברי (19*36288 = 689472 שנים).

ערן רביב

2. הוכחת נוסחת לוינגר

$$\begin{aligned} M &= \text{int} \left[\frac{235(n-1) + 1}{19} \right] = \text{int} \left[\frac{228(n-1) + 7(n-1) + 1}{19} \right] = \\ &= \text{int} \left[\frac{12 * 19(n-1) + 7(n-1) + 1}{19} \right] \\ &= 12(n-1) + \text{int} \left[\frac{7(n-1) + 1}{19} \right] \end{aligned}$$

הביטוי $12(n-1)$ מציין 12 חודשים עבור כל שנה. נסמן $(n-1) = 19A + B$, כאשר A מציין את סך המחזורים השלמים שחלפו עד השנה המבוקשת (ללא המחזור הנוכחי), ו- B מציין את סך השנים שחלפו במחזור הנוכחי (עד שנת n , עד ולא בכלל). נציב ונקבל:

$$\begin{aligned} \text{int} \left[\frac{7(n-1) + 1}{19} \right] &= \text{int} \left[\frac{7(19A + B) + 1}{19} \right] \\ &= \text{int} \left[\frac{7 * 19A + 7B + 1}{19} \right] = 7A + \text{int} \left[\frac{7B + 1}{19} \right] \end{aligned}$$

הביטוי $7A$ מציין 7 חודשים עבור כל מחזור שלם. נותר להראות שהביטוי $\text{int} \left[\frac{7B+1}{19} \right]$ מציין את מספר השנים המעוברות שחלפו עד השנה ה- n לא כולל, כלומר את סך החודשים הנוספים שיש להוסיף. נכתוב את ערכי הביטוי כדלהלן בטבלה מס' 13:

B=n-1 28

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה

| B | 7B+1 | (7B+1)/19 | int[(7B+1)/19] |
|----|------|-------------|----------------|
| 0 | 1 | 0.052631578 | 0 |
| 1 | 8 | 0.421052632 | 0 |
| 2 | 15 | 0.789473684 | 0 |
| 3 | 22 | 1.157894737 | 1 |
| 4 | 29 | 1.526315789 | 1 |
| 5 | 36 | 1.894736842 | 1 |
| 6 | 43 | 2.263157895 | 2 |
| 7 | 50 | 2.631578947 | 2 |
| 8 | 57 | 3 | 3 |
| 9 | 64 | 3.368421053 | 3 |
| 10 | 71 | 3.736842105 | 3 |
| 11 | 78 | 4.105263158 | 4 |
| 12 | 85 | 4.473684211 | 4 |
| 13 | 92 | 4.842105263 | 4 |
| 14 | 99 | 5.210526316 | 5 |
| 15 | 106 | 5.578947368 | 5 |
| 16 | 113 | 5.947368421 | 5 |
| 17 | 120 | 6.315789474 | 6 |
| 18 | 127 | 6.684210526 | 6 |

טבלה 13

מש"ל

3. הצגה גרפית של מספר השורות כפונקציה של מספר המחזורים

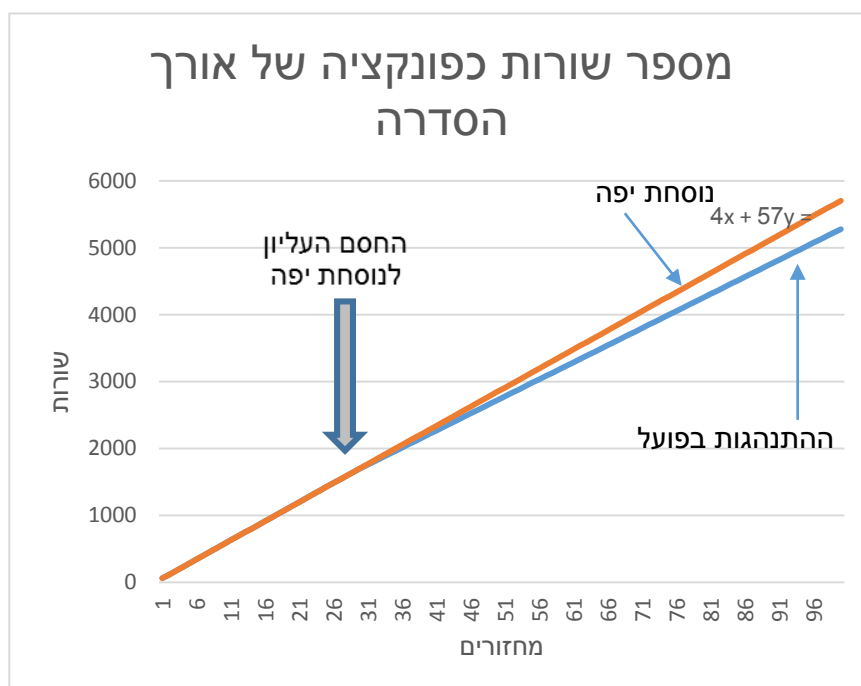
בגוף המאמר אנו מראים שנוסחת יפה בניסוחה המקורי תקפה עד המחזור ה-30. מכאן ואילך ככל שסדרת השנים שנבחר תגדל, יהיו יותר "קיפולים" ולכן מספר הציורפים השונים של סימני השנה עבור n השנים ילך ויקטן עד מספר השורות המקסימלי האפשרי שהוא $n=36288$ שורות (החל מ-2441 מחזורים יתקבלו 36288 שורות). במקרה הפרטי של

ערן רביב

36288 מחזוריים (=689472 שנים) יתקבלו 36288 שורות שכולן שקולות לשורה אחת במוד ציקלי.

כדי להשלים את התמונה שהוצגה בגוף המאמר להלן הצגה גרפית של התנהגות נוסחת יפה והתכנסות בפועל ל-36288 שורות.

כדי להתרשם מהנתונים נחלק את הסקירה לשלושה גרפים, כדלהלן:²⁹



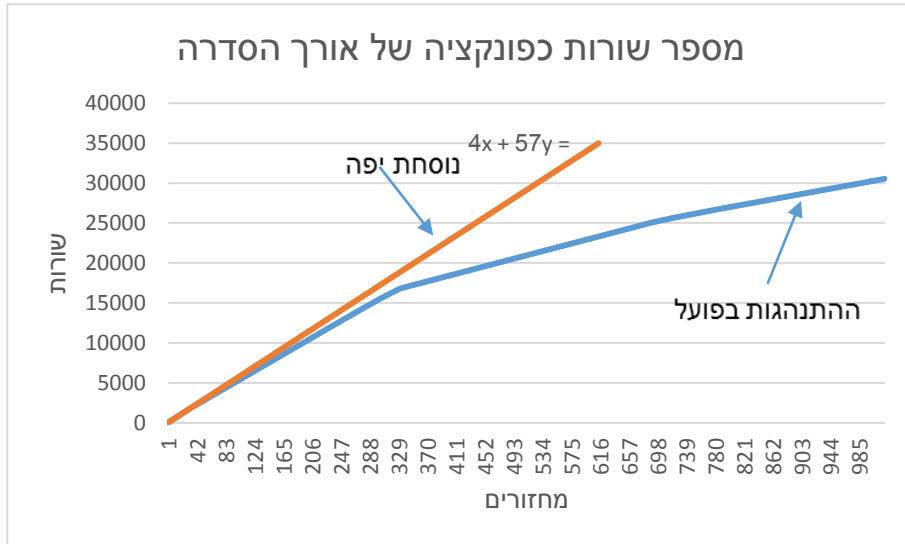
גרף מספר 1 (תצוגה עד 100 מחזוריים)

בגרף זה אנו רואים שבחלוף שלושים מחזוריים מתחילה "היפרדות" בין נוסחת יפה למספר השורות בפועל, כתוצאה מתופעת "הקיפולים". החץ מסמן את החסם העליון לנכונות נוסחת יפה כפי שהוכחנו בגוף המאמר.

הערה: מכיוון שציר X מסמן את המחזוריים, נוסחת יפה מקבלת את הצורה $y=57x+4$ (הצבת $n=19$), כאשר X מקבל את הערכים החל מ-1 ועד 36288.

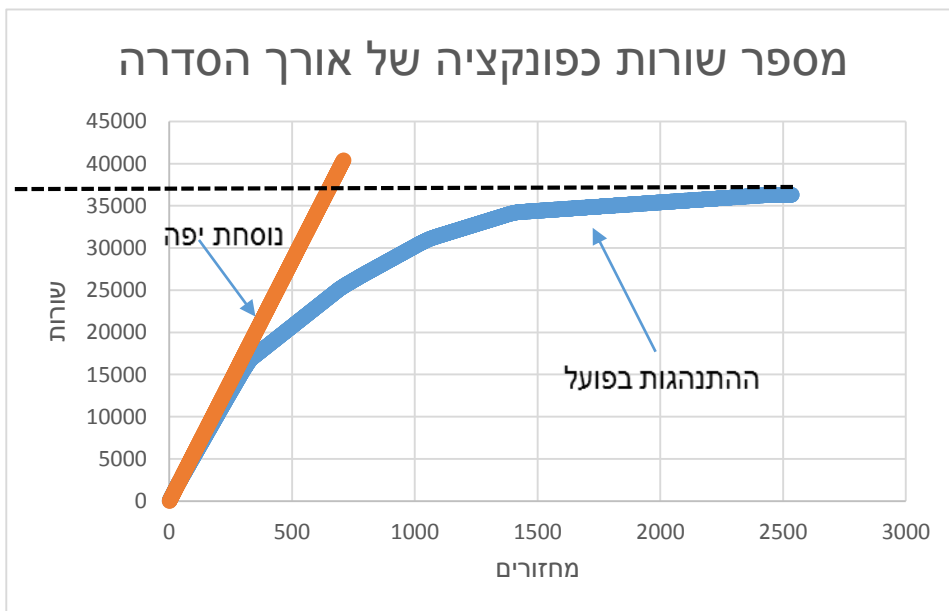
29 תודות לבני אלעד על כתיבת הקוד לקבלת הנתונים המספריים ששימשו להכנת הגרפים.

המבנה המתמטי של לוח ס"א ראשים והחסם העליון לנוסחת צבי הירש יפה



גרף מספר 2 (תצוגה עד 1000 מחזורים)

רואים כיצד בחלוף המחזורים עקב "הקיפולים" מספר השורות מתכנס לערך המקסימלי. גרף ההתנהגות בפועל בנוי מאוסף קטעים ליניאריים.



גרף מספר 3 (תצוגה עד 3000 מחזורים)

ערן רביב

רואים כיצד ההתרחקות מנוסחת יפה הולכת וגדלה בחלוף המחזורים, ובפועל החל מהמחזור ה-2441 מספר השורות הוא המקסימלי (=36288 שורות, מסומן בקו מקווקו) וכך עד המחזור האחרון – 36288!